UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Estabilidade e Limitação para Algumas Equações a Diferenças de Volterra

André Luiz Furtado

Orientação:
Prof. Dr. Higidio Portillo Oquendo

CURITIBA-PR
2006

Estabilidade e Limitação para Algumas Equações a Diferenças de Volterra

Andé Luiz Furtado

Orientação:
Prof. Dr. Higidio Portillo Oquendo

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

CURITIBA-PR
2006

Resumo

O objetivo deste trabalho é o estudo de propriedades qualitativas das soluções de algumas equações a diferenças de Volterra. Nos concentramos na estabilidade, estabilidade assintótica e limitação das soluções dessas equações. Utilizamos como principal ferramenta o Método de Lyapunov. Usando funções de Lyapunov adequadas obtemos diretamente da equação em estudo condições que garantem a propriedade qualitativa investigada.

Palavras-chave: Estabilidade assintótica, Limitação, Equações a Diferenças de Volterra, Funções de Lyapunov.

Abstract

The objective of this work is the study of the qualitatives properties of solutions for some difference Volterra equations. We concentrate in stability, asymptotic stability and boundedness of solutions for this equations. We use Lyapunov Method as tool main. Using suitable functions of Lyapunov we obtain straightway from studied equation enough conditions for the analyzed properties.

Keywords: Asymptotic stability, Boundedness, Volterra Difference Equations, Lyapunov Functions.

O esforço que resultou neste trabalho é dedicado à ciência e ao pensamento científico.

Agradecimentos

À minha mãe Dalva de Oliveira, pela educação, pelo incentivo e apoio constantes. Uma mãe extraordinária.

Ao meu pai Pedro Ivo Furtado (*in memoriam*), pela educação e por ter me convencido a estudar matemática.

Ao meu orientador Higidio Portillo Oquendo, pelo papel fundamental que cumpriu com toda a seriedade no processo (em andamento!) de minha formação como matemático.

A todos os meus professores, especialmente Adonai S. Sant'Anna, José Carlos Cifuentes Vasquez e Pedro Danizete Damázio, por terem tão bem me mostrado a riqueza, beleza e importância da matemática.

Ao Tomas Keller Breuckmann pela ajuda com o LATEX, realizada com boa vontade excepcional.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Nas duas últimas décadas as equações a diferenças têm sido objeto de intensa pesquisa. Isto se deve a duas razões principais . Uma delas consiste nas relações e analogias existentes entre essas equações e equações sobre as quais o conhecimento teórico está consolidado, como equações diferenciais, integrais e integro-diferenciais. Outra causa do interesse nas equações a diferenças, é a sua grande utilidade na modelagem de diversos fenômenos que ocorrem nas ciências em geral.

Uma *equação a diferenças finitas* é uma equação cuja solução é uma sequência com um número finito de termos dados, que são as condições iniciais associadas à equação, e tal que, cada um dos seus demais termos depende de um número finito e fixo de termos anteriores. Este número determina, por definição, a ordem da equação. Desta forma, uma equação a diferenças em que cada termo desconhecido da solução depende dos k termos anteriores, é uma equação a diferenças finitas de ordem k.

Uma outra classe de equações a diferenças, de grande importância, é a constituída pelas *equações a diferenças de Volterra* (EDV). Estas equações, podem ser vistas como uma generalização das equações a diferenças finitas. Isso porque, assim como ocorre com as equações a diferenças finitas, a solução de uma EDV é uma sequência, com alguns termos iniciais dados, porém, os seus demais termos não dependem mais de um número fixo de termos anteriores, como é o caso para as equações a diferenças finitas, mas sim de todos os termos anteriores. Observe que não é possível atribuir ordem a uma EDV, no mesmo sentido em que se faz para as equações a diferenças finitas.

No contexto das motivações para o estudo das equações a diferenças, mencionadas no primeiro parágrafo, vejamos uma situação em que as EDV's surgem naturalmente. A maior parte das equações integrais e integro-diferenciais de Volterra que aparecem nas aplicações não podem ser resolvidas analiticamente. Nesses casos, para obter uma aproximação da solução exata, é preciso lançar mão de métodos numéricos para discretizar aquelas equações, o que resulta em uma EDV.

Vejamos a seguir, por alto, o processo de discretização de uma equação integrodiferencial de Volterra. É sabido que existem vários métodos de integração numérica. Esses métodos diferem entre si, principalmente pela complexidade dos algoritmos utilizados e pela precisão dos resultados obtidos. Aqui não nos deteremos em tais aspectos. Nosso objetivo é apenas explorar intuitivamente o processo de obtenção de uma EDV, pela discretização de uma equação integro-diferencial.

Uma equação integro-diferencial de Volterra tem a seguinte forma

$$F\left(t, f(t), f'(t), \int_a^t K(t,s,f(s))\,ds, g(t)\right) = 0. \tag{1.1}$$

Aqui a incógnita é a função f, enquanto as funções g e K são conhecidas. K é dito ser o núcleo da equação (1.1). Escolhemos, para a análise do processo de discretização, um exemplo bastante comum de equação integrodiferencial de Volterra:

$$f'(t) = g(t) + \int_0^t K(t,s,f(s))\,ds, \tag{1.2}$$

a qual supomos possuir todas as propriedades necessárias para a sua discretização. A grosso modo, o processo de discretização de (1.2), que pode ser encontrado em [18], é o seguinte. Suponha que para uma certa constante suficientemente pequena $h > 0$ queremos aproximar os valores de $f(t_i)$ nos pontos $t_i = ih$. Tal processo pode ser obtido aproximando-se a derivada $f'(t_i)$ por $\dfrac{f(t_i+h)-f(t_i)}{h}$ e utilizando-se de alguma regra de integração numérica para a integral de (1.2), assim, utilizando por exemplo a regra de integração numérica conhecida como regra trapezoidal, e denotando a aproximação de $f(t_i)$ por x_i, obtemos a seginte forma discreta da equação (1.2):

$$x_{n+1} = x_n + hg(t_n) + h^2 \left[\frac{1}{2}K(t_n, t_0, x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} K(t_n, t_i, x_i) + \frac{1}{2}K(t_n, t_n, x_n) \right], \quad (1.3)$$

para $n \geq 0$. O que é importante observar na expressão acima, é que o termo x_{n+1} depende de todos os valores anterioes x_i, $i = 0, 1, ..., n$, donde concluímos que (1.3) é uma EDV.

Além de surgir da discretização de equações integrais e integro-diferenciais, as EDV's também aparecem diretamente na modelagem de diversos fenômenos reais, principalmente biológicos, físicos e econômicos. Vejamos um caso hipotético na biologia. Imaginemos uma espécie de insetos cujos indivíduos vivem cinco dias. Suas fêmeas botam ovos no quarto dia de vida e seus ovos eclodem dois dias depois. Isto significa que as gerações dessa espécie se propagam em intervalos regulares e, além disso, as gerações não se superpõe, ou seja, elas se sucedem de forma discreta. Portanto, a modelagem da dinãmica de reprodução dessa espécie deverá envolver uma equação a diferenças. Imaginemos ainda que, nessa espécie, a população em cada geração depende das populações das gerações anteriores, a partir de uma geração inicial, cuja população é conhecida. Isso indica, dado o que mencionamos no terceiro parágrafo, que o problema mencionado acima é modelado por uma EDV .

De modo geral, as EDV's são úteis para descrever processos discretos cujos estados em cada instante dependem de todos os estados anteriores. Referências sobre as conexões entre EDV's e a teoria da viscoelasticidade, modelos de propagação de perturbações em materiais com memória e vários problemas de biomecânica podem ser encontrados em [8].

O objetivo deste trabalho é estudar propriedades qualitativas das soluções de algumas EDV's lineares e não-lineares. Estamos interessados, principalmente, na estabilidade, estabilidade assintótica e limitação das soluções de EDV's. As informações sobre estas propriedades serão obtidas diretamente, a partir de características da EDV. De forma mais precisa, a análise dos coeficientes de uma EDV linear e, no caso de uma EDV não-linear, a análise dos coeficientes e função responsável pela não linearidade, nos dará algumas informações sobre o comportamento assintótico de sua solução. Uma das principais formas através da qual faremos tal análise será mediante o uso de funções auxiliares apropriadas as quais são conhecidas como Funções de Lyapunov. Essas funções auxiliares possuem algumas propriedades básicas comuns a todas elas. Por isso, e também para adiantar a notação, vamos, logo mais, mencionar tais propriedades. Antes disso, vamos introduzir alguma notação e terminologia.

As notações $\mathbb{Z}^+$ e $\mathbb{R}^+$ representam aqui, respectivamente, o conjunto dos inteiros não-negativos e o conjunto dos números reais não-negativos. Quando escrevermos n ou m, sem mencionarmos a que conjunto pertencem, fica subentendido que são elementos de $\mathbb{Z}^+$. Dado $n \in \mathbb{Z}^+$ representaremos o conjunto dos números inteiros $m \geq n$, por N_n, no caso de ser $n = 1$ denotaremos $N_1 = \mathbb{N}$. O espaço normado euclidiano *r-dimensional*, onde $r \in \mathbb{N}$ será representado por $\mathbb{R}^r$, no caso em que $r = 1$ podemos escrever simplesmente $\mathbb{R}$. Representamos a norma de $x \in \mathbb{R}^r$ por $|x|$ (exceto no capítulo 2 em que representamos por $\|x\|$). Dado $r \in \mathbb{N}$, denotamos o conjunto das sequências cujos termos são *r-uplas* por S_r, isto é

$$S_r = \{(x_n);\ \ x_n \in \mathbb{R}^r\}. \tag{1.4}$$

O elemento $(0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^r$ poderá ser denotado simplesmente por 0. Assim, a sequência $((0, 0, ..., 0), (0, 0, ..., 0), ...) \in S_r$ assumirá a forma $(0, 0, ..., 0, ...)$. Abreviando ainda mais a notação, também usaremos o símbolo 0 para denotar tal sequência. Denotamos o operador diferença, como é usual, por Δ o qual é definido da seguinte forma: para cada $y_n \in S_r$, $\Delta y_n := y_{n+1} - y_n$. Finalmente, às funções $\omega\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ contínuas, não-decrescentes tais que $\omega(0) = 0$ e $\omega(x) > 0$ para $x > 0$, chamaremos

K-funções.

As EDV's que serão objeto de nossa análise no presente trabalho, apresentam a seguinte forma geral:

$$x_{n+1} = H(n, x_{n_0}, \dots, x_n), \qquad n \geq n_0, \tag{1.5}$$

onde x_{n_0} é dado. O número n_0 e a *r-upla* x_{n_0} são chamados, respectivamente, de momento inicial e condição ou estado inicial associados à EDV (1.5). Denotaremos a solução da equação (1.5) associada à condição inicial x_{n_0} por $(x(n, n_0, x_{n_0}))$, ou, por economia de notação, $x(n, n_0, x_{n_0})$. Caso não haja possibilidade de confusão, poderemos representar a solução, ainda mais simplesmente, por (x_n). Ao conjunto de valores que assume a solução de uma EDV a partir de um dado inicial chamaremos de trajetória e cada termo da solução de estado. Mais precisamente, chama-se de estado atual ao termo que esta sendo encontrado no processo recursivo de solução da EDV, em contrapartida, os termos anteriores são chamados de estados passados.

A função H que aparece acima satisfaz

$$H(n, y_{n_0}, \dots, y_n, \dots) = H(n, y_{n_0}, \dots, y_n), \qquad \forall n \geq n_0, \tag{1.6}$$

isto é, H não depende das variáveis y_j para $j \geq n+1$. Portanto, H está definida em $N_{n_0} \times S_r$ e assume valores em $\mathbb{R}^r$. Nesta dissertação, por simplicidade, será analisada a estabilidade em torno de soluções estacionárias ou de equilíbrio. Para isso a função H satisfaz:

$$H(n, 0, 0, \dots, 0) = 0, \qquad \forall n \geq n_0. \tag{1.7}$$

Como x_{n_0} e H são conhecidos, os termos sucessivos da solução podem ser calculados fazedo $n = n_0, n_0+1, n_0+2, ...$ em (1.5). Assim,

$$\begin{aligned}
x_{n_0+1} &= H(n_0, x_{n_0}), \\
x_{n_0+2} &= H(n_0+1, x_{n_0}, x_{n_0+1}), \\
&\vdots \\
x_{n_0+k} &= H(n_0+k-1, x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+k-1}).
\end{aligned}$$

As idéias básicas da teoria de estabilidade para equações diferenciais, integrais e integro-diferenciais mantêm-se para as equações discretas que são objeto de nosso estudo neste trabalho. Lembramos que, por exemplo, no caso das equações diferenciais ordinárias, temos que a existência de uma determinada função associada à equação garante a estabilidade ou estabilidade assintótica (dependendo das propriedades de tal função) da solução estacionária da equação analisada. Uma tal função é chamada de função de Lyapunov para a equação em estudo. A título de salientar as analogias existentes entre os casos contínuo e discreto, recordamos que as funções de Lyapunov no caso contínuo são diferenciáveis e, a grosso modo, uma das propriedades de tais funções é ter derivada não-positiva ao longo das soluções da equação. No caso discreto das EDV´s esta propriedade terá como correspondente a monotonicidade (decrescimento ou não-crescimento) da função auxiliar ao longo da solução da EDV. Ainda com o intuito de apontar as semelhanças entre os procedimentos que fazem uso de funções de Lyapunov para o estudo de estabilidade nos casos contínuos e os tratados na presente dissertação, trazemos a seguir um exemplo que trata de equações integro-diferenciais. Sejam $A \in \mathbb{R}^{r\times r}$ uma matriz para a qual existe uma matriz simétrica definida-positiva B, tal que $A^\top B + BA = -I$ e $C(t,s) \in \mathbb{R}^{r\times r}$ uma matriz de funções contínuas com $\int_t^\infty |C(u,s)|\,du$ contínua em $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$. Nestas condições consideremos a equação integro-diferencial

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \int_0^t C(t,s)\mathbf{x}(s)\,ds. \tag{1.8}$$

Se a matriz B acima é tal que $|\mathbf{x}| \geqslant 2k[\mathbf{x}]^{\frac{1}{2}}$, $|B\mathbf{x}| \leqslant K[\mathbf{x}^\top B\mathbf{x}]^{\frac{1}{2}}$ e $r|\mathbf{x}| \leqslant [\mathbf{x}^\top B\mathbf{x}]^\top$, então, conforme [1] o estudo de estabilidade para a equação (1.8) pode ser feito mediante o uso do seguinte funcional

$$V(t,f(t)) = (\mathbf{x}^\top B\mathbf{x})^{\dfrac{1}{2}} + \bar{K}\int_0^t \int_t^\infty |C(u,s)|\,du|\mathbf{x(s)}|\,ds, \qquad \bar{K} > 0.$$

A similaridade entre o funcional acima e o utilizado na prova do Teorema (3.2) na página 26, sugere que, guardadas as devidas adaptações, valem resultados semelhantes nos casos contínuo e discreto, no que se refere ao estudo da estabilidade de soluções de equilíbrio.

As funções auxiliares mencionadas acima, a serem utilizadas ao longo do trabalho serão denotadas com a letra V, são funções definidas em $N_{n_0} \times S_r$ asumindo valores reais não negativos. Estas funções dependem unicamente dos estados atuais e passados, porém não dos estados futuros, isto é

$$V(n, y_{n_0}, \ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots) = V(n, y_{n_0}, \ldots, y_n), \qquad \forall n \geq n_0. \tag{1.9}$$

ou, em alguns casos, depende unicamente do estado atual, isto é

$$V(n, y_{n_0}, \ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots) = V(n, y_n), \qquad \forall n \geq n_0 \tag{1.10}$$

Ao longo de todo o presente trabalho, quando denotarmos uma função por V, significará que tal função cumpre (1.9) ou (1.10), ficando claro em cada situação qual dos dois casos estará valendo. Devido às analogias entre estas funções e as funções de Lyapunov, utilizadas para investigar estabilidade nas equações diferenciais, estas funções são também chamadas de funções de Lyapunov. Por exemplo a diferença entre a imagem do estado seguinte ao atual e do estado atual será não positivo, isto é

$$V(n+1, x_{n_0}, \ldots, x_n, x_{n+1}) - V(n, x_{n_0}, \ldots, x_n) \leqslant 0.$$

Vamos nos utilizar destas funções V com as propriedades acima ou com propriedades menos restritivas ou com propriedades adicionais, no estudo de estabilidade e também de limitação. Convém então neste momento, fazer uma breve (ainda que vaga) descrição do procedimento a ser adotado nestes casos:

- Dada uma EDV, sobre cuja solução desejamos obter alguma informação qualitativa, exibiremos uma função V associada à EDV, que tenha propriedades convenientes, de tal modo que, da existência de tal função V poderemos inferir alguma propriedade qualitativa da solução da EDV.

Todos os detalhamentos matemáticos envolvidos no procedimento descrito acima serão desenvolvidos ao longo desta dissertação. Porém, para maior clareza, adiantamos que quando dizemos no item acima que a função V está associada à EDV, significa que V depende dos coeficientes da EDV, caso ela seja linear, e, no caso de ela ser não-linear, depende dos coeficientes e da função que determina a não-linearidade. Além disso, no item acima, falamos em exibir uma função V, e não em encontrar uma função V. De fato, o problema de encontrar tais funções auxiliares não será abordado neste trabalho. Investigações nesse sentido podem ser encontradas nas referências [6], [8] e [13].

Dentre as EDV's lineares e não-lineares que estudaremos, veremos EDV's homogêneas e não homogêneas, do tipo convolução e não-convolução, unidimensionais e multidimensionais.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 2, a seguir, lembramos alguns resultados que serão utilizados ao longo de todo o texto. O capítulo 3 trata da estabilidade, estabilidade assintótica ou simplesmente convergência das soluções de algumas EDV's. Finalmente, no quarto capítulo estudamos a limitação das soluções de algumas EDV's.

Capítulo 2

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns resultados que serão utilizados ao longo do texto.

2.1 Resultados de Análise Real

Proposição 2.1 *Se A e B são dois conjuntos não-vazios de números reais limitados inferiormente, então* $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

Prova: Seja $M = \min\{\inf A, \inf B\}$. Para começar, vejamos que M é uma cota inferior de $A \cup B$. Se $x \in A \cup B$, então $x \in A$ ou $x \in B$. Caso $x \in A$, então $x \geq \inf A$, e portanto, da definição de M, concluímos que $x \geq M$. Do mesmo modo, se $x \in B$, então $x \geq M$. Fica assim provado que M é cota inferior de $A \cup B$. Vejamos agora que M é a maior cota inferior de $A \cup B$. Para fixar as idéias consideremos $M = \inf A$. Para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in A \subset A \cup B$, tal que $x \leqslant M + \epsilon$, fica assim provado que para todo $\epsilon > 0$, $M + \epsilon$ não é cota inferior de $A \cup B$, ou seja, M é a maior cota inferior de $A \cup B$, como queríamos mostrar. ■

Proposição 2.2 *Seja* $\psi\colon A \subset \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, tal que* $\psi(x) > 0$, $\forall x \neq 0$, $\psi(0) = 0$. *Suponha que existe* $M > 0$ *satisfazendo* $\inf\limits_{|x|>M} \psi(x) > 0$. *Então a função* $\omega\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, *dada por* $\omega(\delta) = \inf\limits_{|x|\geq\delta} \psi(x)$, *é contínua, não-decrescente,* $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta) > 0$ *para todo* $\delta > 0$ *e* $\omega(|x|) \leqslant \psi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^r$.

Prova: A continuidade de ω segue da continuidade de ψ. Vejamos que ω é não-decrescente. Sejam $\delta_1,\ \delta_2 \in \mathbb{R}^+,\ \ \delta_1 < \delta_2$. Claramente,

$$\{\psi(x);\ \ |x| \geq \delta_2\} \subset \{\psi(x);\ \ |x| \geq \delta_1\},$$

o que implica

$$\inf_{|x|\geq\delta_2} \psi(x) \geq \inf_{|x|\geq\delta_1} \psi(x);$$

isto é,

$$\omega(\delta_2) \geq \omega(\delta_1),$$

o que encerra a prova de que ω é não-decrescente. Da definição de ω e da hipótese $\psi(0) = 0,\ \ \psi(x) > 0,\ \ \forall x \neq 0$, segue sem difculdade que $\omega(0) = 0$. Agora vamos provar que $\omega(\delta) > 0,\ \ \forall\delta > 0$. Como por hipótese $\inf\limits_{|x|\geq M} \psi(x) > 0$, basta verifcar a desigualdade para $0 < \delta < M$. Da definição de ω e da Proposição anterior obtem-se a igualdade

$$\omega(\delta) = \min\left(\inf_{\delta\leqslant|x|\leqslant M} \psi(x), \inf_{|x|>M} \psi(x)\right), \qquad 0 < \delta < M. \tag{2.1}$$

Agora, da continuidade de ψ no compacto $\{x \in \mathbb{R}^r;\ \ 0 < \delta \leqslant |x| \leqslant M\}$ e da hipótese $\psi(x) > 0,\ \ \forall x \neq 0$, segue que

$$\inf_{\delta\leqslant|x|\leqslant M} \psi(x) > 0,\ \ 0 < \delta < M.$$

Daqui, da hipótese $\inf\limits_{|x|>M} \psi(x) > 0$ e de (2.1) segue que

$$\omega(\delta) > 0,\ \ 0 < \delta < M,$$

como queríamos. Para finalizar, segue diretamente da definição de ω que $\omega(|x|) \leqslant \psi(x),\ \ \forall x \in \mathbb{R}^r$. ■

Proposição 2.3 *Se (x_n) é uma sequência de números reais que converge para a e (t_n) é uma sequência de números positivos com*

$$\lim_{n\to\infty}(t_1 + \cdots + t_n) = \infty,$$

então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_1x_1 + \cdots + t_nx_n}{t_1 + \cdots + t_n} = a.$$

Prova: Ver [17]. ■

Definição 2.1 *Diz-se que uma função $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é limitada inferiormente numa vizinhança do ∞ quando existem $A > 0$ e $k > 0$, tais que $x \in X$, $x > A \Rightarrow f(x) \geq k$.*

Definição 2.2 *Seja $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que $c \in \mathbb{R}$ é valor de aderência de f quando $x \to \infty$ caso exista uma sequência de números $x_n \in X$, com $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ e $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$.*

Definição 2.3 *Se $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é limitada inferiormente numa vizinhança do ∞ e existe o menor valor de aderência de f quando $x \to \infty$, diz-se que tal valor de aderência é o limite inferior de f quando $x \to \infty$.*

Escrevemos

$$\liminf_{x\to\infty} f(x) = L$$

para indicar que L é o limite inferior de f quando $x \to \infty$.

Proposição 2.4 *Sejam $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função limitada inferiormente numa vizinhança de ∞, $L = \liminf_{x\to\infty} f(x)$ e $c < L$. Então para cada sequência (x_n) de termos de X com $x_n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow f(x_n) \geq c$.*

Prova: Suponhamos, por redução ao absurdo, que existe uma sequência (x_n) de termos de X, com $x_n \to \infty$, e tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k_n \in \mathbb{N}$, $k_n > n$ de modo que $f(x_{k_n}) < c$. Como f é uma função limitada inferiormente numa vizinhança de ∞, existem $A \in X$ e $M \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) \geq M$, para todo $x > A$. Assim, para n suficientemente grande

$$M \leqslant f(x_{k_n}) < c.$$

Daí, como $f(x_{k_n})$ é uma sequência limitada, ela possui uma subsequência convergente e que converge para um número $r \leqslant c < L$, o que contraria o fato de ser L o limite inferior de f quando $x \to \infty$. ■

Definições análogas podem ser dadas para valores de aderência de f quando $x \to -\infty$, limite inferior de f quando $x \to -\infty$, limite superior de f quando $x \to \infty$ e limite superior de f quando $x \to -\infty$. Para esses valem resultados análogos ao provado acima.

2.2 Algumas Noções de Análise Funcional

Definição 2.4 *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Uma aplicação*

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$$

é dita uma norma em E se, para quaisquer $x, y \in E$ e para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\|x\| \geq 0$;
2. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$;
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$;
4. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Exemplo 2.1 *Dados $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e um número real α, definimos a soma $x + y$ e o produto $\alpha \cdot x$ pondo*

$$
\begin{aligned}
x + y &= (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n), \\
\alpha \cdot x &= (\alpha x_1, ..., \alpha x_2).
\end{aligned}
$$

Estas operações fazem de $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial sobre o corpo dos reais. $\square$

Pode-se definir uma infinidade de normas no espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Por exemplo, podemos definir sobre o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, as funções

$$
\begin{aligned}
x \to \|x\| &= \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{(Norma Euclideana)} \\
x \to \|x\|_M &= \max\{|x_1|, ... |x_n|\}, \quad \text{(Norma do Máximo)} \\
x \to \|x\|_S &= |x_1| + \ldots + |x_n|. \quad \text{(Norma da Soma)}
\end{aligned}
$$

Pode-se mostrar que tais funções são normas em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.5 *Um espaço vetorial normado é um par $(E, \|\cdot\|)$, onde E é um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ é uma norma definida em E.*

Sempre que não houver risco de dúvida quanto à norma do espaço vetorial $(E, \|\cdot\|)$, representaremos tal espaço simplesmente por E, deixando subentendida a norma.

Definição 2.6 *Diz-se que um sequência de elementos x_n de um espaço vetorial normado E converge para um ponto x, quando para cada $\epsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que*

$$n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| < \epsilon.$$

Proposição 2.5 *Seja (x_n) uma sequência em um espaço vetorial normado. Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, então $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$.*

Prova: Basta notar que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. $|\,\|x_n\| - \|x\|\,| \leqslant \|x_n - x\|$. $\blacksquare$

Definição 2.7 *Diz-se que duas normas $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ em E são equivalentes, quando existem duas constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que,*

$$\|x\|_a \leqslant \alpha \|x\|_b \quad e \quad \|x\|_b \leqslant \beta \|x\|_a, \qquad \forall x \in E.$$

Proposição 2.6 *Todas as normas em um espaço vetorial E de dimensão finita são equivalentes.*

Prova: Seja $\alpha = \max\{f^1, \ldots, f^n\}$, onde $\{f^1, \ldots, f^n\}$ é uma base para E. Considere $\|\cdot\|_S$ e $\|\cdot\|$ a norma da soma e uma norma arbitrária em E. Para cada $x \in E$ temos que

$$\|x\| = \left\|x^1 f^1 + \ldots + x^n f^n\right\| \leqslant |x^1| \left\|f^1\right\| + \ldots + |x^n| \left\|f^n\right\| \leqslant \alpha \|x\|_S.$$

Resta provar que existe $\beta \in \mathbb{R}$, tal que $\|x\|_S \leqslant \beta \|x\|$, para todo $x \in E$. Suponha que isto seja falso. Então para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $x_j \in E$ tal que $\|x_j\| < \dfrac{1}{j} \|x_j\|_S$. Tomando $y_j = \dfrac{x_j}{\|x_j\|_S}$, temos que

$$\|y_j\|_S = 1 \qquad \text{e} \qquad \|y_j\| = \frac{\|x_j\|}{\|x_j\|_S} < \frac{1}{j}. \tag{2.2}$$

A igualdade acima implica que a sequência (y_j) possui uma subsequêcia (y_{k_j}) que converge para um ponto $y \in E$ segundo a norma da soma e portanto

$$\lim_{j \to \infty} \left\|y_{k_j}\right\|_S = \|y\|_S = 1 \qquad \therefore \qquad y \neq 0. \tag{2.3}$$

Por outro lado, para cada $j \in \mathbb{N}$ temos que

$$\|y\| \leqslant \left\|y - y_{k_j}\right\| + \left\|y_{k_j}\right\| \leqslant \alpha \left\|y - y_{k_j}\right\|_S + \frac{1}{k_j} \to \infty$$

quando $j \to \infty$, o que implica que $y = 0$ uma contradição com (2.3). Por transitividade segue a conclusão da Proposição. ■

Definição 2.8 *Uma norma matricial em $\mathbb{R}^{n\times n}$ é uma função que transforma cada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ em um número real $\|A\|$, chamado a norma de A, e que satisfaz as seguintes condições para quaisquer $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$:*

1. $A \neq 0 \Rightarrow \|A\| > 0$;

2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$;

3. $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$;

4. $\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$.

Exemplo 2.2 *A norma de Frobenius definida em* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *por*

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Toda norma em $\mathbb{R}^n$ pode ser usada para definir uma norma em $\mathbb{R}^{n\times n}$ de um modo natural como é dado na seguinte

Definição 2.9 *Dada uma norma* $\|\cdot\|_v$ *em* $\mathbb{R}^n$*, a norma em* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *induzida por* $\|\cdot\|_v$ *é definida por*

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}.$$

É fácil mostrar que a norma em $\mathbb{R}^{n\times n}$ definida acima é uma norma matricial.
Quando o contexto não deixar dúvida quanto à norma de $\mathbb{R}^n$ que induz a norma em $\mathbb{R}^{n\times n}$ pode-se omitir os índices.

Proposição 2.7 *Se a norma* $\|\cdot\|_v$ *em* $\mathbb{R}^n$ *induz a norma matricial* $\|\cdot\|$ *em* $\mathbb{R}^{n\times n}$*, então, para quaisquer* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e* $x \in \mathbb{R}^n$*,*

$$\|Ax\|_v \leqslant \|A\| \, \|x\|_v .$$

Prova: Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Para $x = 0$ a igualdade segue facilmente . Suponhamos agora $x \neq 0$. Então,

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant \max_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} = \|A\| .$$

Portanto, segue o resultado. ■

Definição 2.10 *Uma métrica (ou distância) sobre um conjunto E é uma função*

$$d\colon E \times E \to \mathbb{R}$$

que possui as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y, z \in E$:

1. $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0$ *se e somente se* $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

O número real $d(x, y)$ é chamado de *distância* de x a y.

Pode-se mostrar sem dificuldade que num espaço normado E, a função

$$(x, y) \to \|x - y\|$$

é uma métrica. Consideraremos sempre um espaço normado munido dessa métrica.

Definição 2.11 *Seja um espaço normado E munido da métrica dada acima. Uma sequência (x_n) de pontos de E é uma sequência de Cauchy em E se, dado $\epsilon > 0$, existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, $n, m \geq n(\epsilon) \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$.*

Definição 2.12 *Um espaço normado E é dito completo, ou de Banach, em relação à métrica proveniente de sua norma, se toda sequência de Cauchy de elementos de E é convergente em E, relativamente a essa métrica.*

Exemplo 2.3 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, *onde $|x|$ indica o valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$, é um espaço de Banach.*

Definição 2.13 *Um produto interno sobre um espaço vetorial real é uma função $(x, y) \to \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$ definida em $E \times E$ e tomando valores reais, tal que para quaisquer $x, y, z \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ sejam válidas as seguintes relações:*

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;

2. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle y, z\rangle$;

3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \cdot \langle x, y\rangle = \langle x, \alpha y\rangle$;

4. $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle > 0$.

O exemplo mais comum é o *produto interno canônico* do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, o qual é dado por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

sendo $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$.

É comum representar o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$ como um produto de matrizes da seguinte forma

$$\langle x, y\rangle = y^\top x = x^\top y.$$

2.3 Núcleo Resolvente

Nesta seção vamos obter uma expressão para a solução de uma EDV em que cada estado depende somente dos estados anteriores e não do estado atual, isto é, para uma equação explícita. Um tratamento para as equações ímplícitas, além das explícitas, pode ser encontrado em [10]. As soluções serão dadas para equações que apresentam a seguinte forma:

$$x_{n+1} = a_n x_n + \sum_{j=n_0}^{n} a_{n,j} x_j + b_n, \qquad n \geq n_0, \tag{2.4}$$

onde $x_n \in \mathbb{R}^r$, $a_{n,j} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ e $b_n \in \mathbb{R}^r$ é dado. Veremos como obter o termo geral da solução da equação acima em função de b_n e de matrizes $R_{m,n}$, $0 \leqslant n \leqslant m$, m fixo, tais que $R_{n,n} = I$ e para cada $m \geq n$ é satisfeita a seguinte relação:

$$R_{m+1,n} = R_{m+1,n+1} a_n + \sum_{j=n}^{m} R_{m+1,j+1} a_{j,n}. \tag{2.5}$$

Tais matrizes são conhecidas como matrizes resolventes para a equação (2.4). Multiplicando à esquerda a equação (2.4) por $R_{m+1,n+1}$, $n_0 \leqslant n \leqslant m$, m fixo, obtemos

$$R_{m+1,n+1}x_{n+1} = R_{m+1,n+1}a_n x_n + R_{m+1,n+1}\sum_{j=n_0}^{n} a_{n,j}x_j + R_{m+1,n+1}b_n.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=n_0}^{m} R_{m+1,n+1}x_{n+1}\\
&= \sum_{n=n_0}^{m} R_{m+1,n+1}a_n x_n + \sum_{n=n_0}^{m} R_{m+1,n+1}\sum_{j=n_0}^{n} a_{n,j}x_j + \sum_{n=n_0}^{m} R_{m+1,n+1}b_n\\
&= \sum_{n=n_0}^{m} R_{m+1,n+1}a_n x_n + \sum_{l=0}^{m-n_0}\sum_{j=l}^{m-n_0} R_{m+1,n_0+1+j}a_{n_0+j,n_0+l}x_{n_0+l} + \sum_{n=n_0}^{m} R_{m+1,n+1}b_n.
\end{aligned}$$

Fazendo $n_0 + j = r$ e $n_0 + l = p$, fica,

$$\sum_{n=n_0}^{m} R_{m+1,n+1}x_{n+1} = \sum_{n=n_0}^{m} R_{m+1,n+1}a_n x_n + \sum_{p=n_0}^{m}\sum_{r=p}^{m} R_{m+1,r+1}a_{r,p}x_p + \sum_{n=n_0}^{m} R_{m+1,n+1}b_n.$$

Trocando p por n e r por j, obtemos,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=n_0}^{m} R_{m+1,n+1}x_{n+1} &= \sum_{n=n_0}^{m} R_{m+1,n+1}a_n x_n + \sum_{n=n_0}^{m}\sum_{j=n}^{m} R_{m+1,j+1}a_{j,n}x_n + \sum_{n=n_0}^{m} R_{m+1,n+1}b_n\\
&= \sum_{n=n_0}^{m}\left[\underbrace{\left(R_{m+1,n+1}a_n + \sum_{j=n}^{m} R_{m+1,j+1}a_{j,n}\right)}_{=R_{m+1,n}} x_n + R_{m+1,n+1}b_n\right] \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=n_0}^{m} R_{m+1,n+1}x_{n+1} &= \sum_{n=n_0+1}^{m+1} R_{m+1}, nx_n\\
&= x_{m+1} + \sum_{n=n_0+1}^{m} R_{m+1,n}x_n\\
&= x_{m+1} - R_{m+1,n_0}x_{n_0} + R_{m+1,n_0}x_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{m} R_{m+1,n}x_n\\
&= x_{m+1} - R_{m+1,n_0}x_{n_0} + \sum_{n=n_0}^{m} R_{m+1,n}x_n. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Das expressoões (2.6) e (2.7) obtemos

$$x_{m+1} = R_{m+1,n_0} x_{n_0} + \sum_{n=n_0}^{m} R_{m+1,n+1} b_n,$$

fazendo a mudança de índice $n+1=l$ e denotando $m+1=n$ obtemos

$$x_n = R_{n,n_0} x_{n_0} + \sum_{l=n_0+1}^{n} R_{n,l} b_{l-1}.$$

Capítulo 3

Estabilidade

O fato da solução de uma equação a diferenças ser uma sequência cujos termos não dados podem ser obtidos recursivamente é uma grande vantagem em relação aos problemas modelados por equações integro-diferenciais. De fato, esta peculiaridade das equações a diferenças nos permite, com o uso dos computadores, obter um número de termos tão grande quanto desejarmos de sua solução. Em muitas aplicações isso é suficiente para conseguirmos as informações que desejamos. Por exemplo, se desejamos saber qual será a população daquela espécie de insetos, sobre a qual falamos no capítulo 1, ao final de 30 dias a partir do nascimento da população inicial, basta encontrar o sexto termo da sequência solução da EDV que modela a dinâmica de reprodução de tal espécie.

Porém, a possibilidade de obter tantos termos quantos desejarmos da solução de uma equação a diferenças não necessariamente nos fornece uma fórmula (não recursiva) para a solução, e tampouco, respostas para algumas questões mais complexas do que a mencionada acima. Por exemplo, suponhamos que se tenha observado experimentalmente, sob determinadas condições específicas, que para uma geração inicial daquela espécie de insetos com P_i indivíduos, as gerações que a sucedem têm o mesmo número P_i de indivíduos. Desejamos agora saber qual é a dinâmica populacional desta espécie sob aquelas mesmas condições específicas, porém tomando valores diferentes de P_i para a geração inicial. Neste sentido, podemos formular as duas seguintes perguntas:

- Será que podemos garantir que as populações das gerações que sucedem uma geração inicial estarão tão próximas quanto desejarmos de P_i desde que tomemos a geração inicial com uma população $P_i + \delta$ suficientemente próxima de P_i?

- Será que, se a resposta da pergunta acima for afirmativa, as populações das gerações posteriores às gerações iniciais próximas de P_i se aproximam de P_i cada vez mais à medida que as gerações se sucedem?

Estas questões, que são de caráter qualitativo, não podem ser respondidas apenas a partir do conhecimento de certo número de termos da solução da equação, por maior que tal número seja. Para responder a estas perguntas é preciso então, utilizar métodos apropriados que nos dêem informações sobre propriedades qualitativas da solução da equação que modela a dinâmica de reprodução daquela espécie em estudo.

A primeira questão levantada acima diz respeito à noção de estabilidade e a segunda à estabilidade assintótica.

Vejamos agora, de forma descontextualizada, estes conceitos no caso das EDV's. Se a solução de uma EDV associada a uma certa condição inicial tem como solução uma sequência constante, então diz-se que aquela condição inicial é um ponto de equilíbrio (ou ponto crítico ou estado estacionário) da EDV e, a respectiva solução é dita ser uma solução de equilíbrio da EDV. Se para dados iniciais próximos da condição inicial de equilíbrio, as soluções permanecem próximas da solução de equilíbrio, então, diz-se que esta solução de equilíbrio é estável. Se, além disso, existir uma vizinhança de dados inicias próximos do ponto de equilíbrio, tal que as respectivas soluções convergem para a solução de equilíbrio, então esta solução de equilíbrio é dita assintóticamente estável.

O ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^r$ é um ponto de equilíbrio da equação

$$x_{n+1} = H(n, x_{n_0}, \ldots, x_n),\ n \in N_0, \tag{3.1}$$

se para cada $n \in N_{n_0}$ for válido que $H(n, \bar{x}, \ldots, \bar{x}) = \bar{x}$. Em nosso trabalho, sem perda de generalidade, vamos considerar a origem como ponto de equilíbrio. Uma EDV com ponto estacionário não nulo é equivalente a uma EDV com a origem como ponto de equilíbrio, conforme mostramos a seguir. Se $\bar{x} \neq 0$, fazemos para cada $n \geq n_0 : y_n = x_n - \bar{x}$. Esta mudança, transforma a equação (3.1) acima em

$$y_{n+1} = H(n, y_{n_0} + \bar{x} \ldots, y_n + \bar{x}) - H(n, \bar{x}, \ldots, \bar{x}) \equiv F(n, y_{n_0}, \ldots, y_n), \quad n \geq n_0,$$

que claramente, tem a origem como ponto de equilíbrio.

Neste capítulo, o principal objetivo é estudar condições para a estabilidade e estabilidade assintótica da solução nula de algumas EDV's, sem que seja necessário resolver analiticamente tais equações. As equações que serão objeto de nosso estudo neste capítulo apresentam a seguinte forma geral:

$$x_{n+1} = H(n, x_{n_0}, \ldots, x_n), \tag{3.2}$$

onde $x_n \in \mathbb{R}^r$ e $H\colon N_{n_0} \times S_r \to \mathbb{R}^r$, é tal que $H(n, y_{n_0}, \ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots) = H(n, y_{n_0}, \ldots, y_n)$, isto é, para cada $n \geq n_0$, H não depende dos termos y_k com $k > n$. Asumiremos também que a solução nula é uma solução de equilíbrio, isto é $H(n, 0, \ldots, 0) = 0$ para todo $n \geq n_0$. Como mencionamos no primeiro capítulo, denotaremos com $x(n, n_0, x_{n_0})$ as soluções de (3.2) que em n_0 tem como dado inicial x_{n_0}

Definição 3.1 *Diz-se que a solução nula de (3.2) é:*

1. *estável se para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que,*

$$|x_{n_0}| < \delta \Rightarrow |x(n, n_0, x_{n_0})| < \epsilon, \qquad \forall n \geq n_0;$$

2. *assintóticamente estável se é estável e se existe um conjunto aberto* $A \subset \mathbb{R}^r$ *contendo a origem, tal que* $\lim_{n\to\infty} x(n, n_0, x_{n_0}) = 0$*, qualquer que seja a condição inicial* $x_{n_0} \in A$.

No caso em que A coincide com $\mathbb{R}^r$ na definição anterior, diremos que a solução nula tem estabilidade assintótica global.

3.1 Estabilidade Via Método de Lyapunov

Nesta seção estudamos condições para a estabilidade assintótica da solução nula de EDV's da forma:

$$x_{n+1} = H(n, x_0, \ldots, x_n), \tag{3.3}$$

onde $x_n \in \mathbb{R}^r$ e H é como em (3.2), porém estudaremos a evolução a partir de $n_0 = 0$. Logo as soluções são denotadas por $x(n, 0, x_0)$ com dado inicial x_0. Algumas vezes denotaremos a solução simplesmente por x_n. Para investigar a estabilidade de tais EDV's usaremos funções auxiliares $V : \mathbb{Z}^+ \times S_r \to \mathbb{R}$ não negativas, tais que $V(n, y_0, \ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots) = V(n, y_0, \ldots, y_n)$, isto é, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, V não depende dos termos y_k para $k > n$, e $V(n, 0, \ldots, 0) = 0$. Além disso, a primeira diferença ao longo de suas trajetórias é não-positiva, isto é

$$\Delta V := V(n+1, x_0, \ldots, x_{n+1}) - V(n, x_0, \ldots, x_n) \leqslant 0, \qquad \forall n \geq 0.$$

As condições para a estabilidade assintótica global da solução nula das equações desta seção são similares às que se pode encontrar nas referências [6], [9], [13] e [16]. Lembramos que uma função ω é uma *K-função* se estiver definida e for contínua em $[0, \infty)$, não-decrescente, com $\omega(0) = 0$ e $\omega(x) > 0$, para cada $x > 0$. De agora em diante, sempre que escrevermos ω ou ω_j sem fazer nem um comentário, ficará subentendido que se trata de uma K-função.

O próximo teorema nos dá condições suficientes para estabilidade assintótica da solução nula de (3.3) e fundamento para os demais teoremas da seção.

Teorema 3.1 *Para que a solução nula de (3.3) tenha estabilidade assintótica global é suficiente que existam uma função* $V\colon \mathbb{Z}^+ \times S_r \to \mathbb{R}$ *e duas K-funções,* ω_1, ω_2*, de modo que as seguintes relações sejam satisfeitas:*

$$\omega_1(|x_n|) \leqslant V(n, x_0, \ldots, x_n), \quad \forall x_n \in \mathbb{R}^r;$$

$$V(0, y) \;\; \text{é contínua em} \;\; y = 0;$$

$$\Delta V = V(n+1, x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}) - V(n, x_0, \ldots, x_n) \leqslant -\omega_2(|x_n|), \tag{3.4}$$

para toda solução x_n *de* (3.3).

Prova: Começamos mostrando que a solução nula de (3.3) é estável. Fixemos $\epsilon > 0$. Devemos mostrar que existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|x_0| < \delta \Rightarrow |x_n| < \epsilon \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+,$$

onde x_n é uma abreviação para $x(n, 0, x_0)$, conforme já convencionamos anteriormente. Como $\epsilon > 0$, então, $\omega_1(\epsilon) > 0$. Desta desigualdade e da continuidade de $V(0, y)$ em $y = 0$, segue que existe $\delta(\epsilon) = \delta > 0$, tal que

$$|y| < \delta \Rightarrow |V(0, y) - V(0, 0)| < \omega_1(\epsilon).$$

Daqui, como V é uma função não-negativa e $V(n, 0) = 0$, tem-se

$$|y| < \delta \Rightarrow V(0, y) < \omega_1(\epsilon).$$

Consequentemente, tomando uma condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^r$, satisfazendo $|x_0| < \delta$, obtemos

$$V(0, x_0) < \omega_1(\epsilon)$$

Por outro lado, pelo fato de V ser não-crescente ao longo da trajetória, concluímos que, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$V(n, x_0, ..., x_n) \leqslant V(0, x_0).$$

Das duas últimas desigualdades e da hipótese de que $\omega_1(|x_n|) \leqslant V(n, x_0, \ldots, x_n)$, obtem-se

$$|x_0| < \delta \Rightarrow \omega_1(|x_n|) < \omega_1(\epsilon) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+,$$

donde segue, pelo fato de ω_1 ser não-decrescente:

$$|x_0| < \delta \Rightarrow |x_n| < \epsilon \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+,$$

provando a estabilidade da solução nula de (3.3), como queríamos.

Para finalizar a prova de que a solução nula de (3.3) tem estabilidade assintótica global, resta mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} x(n, 0, x_0) = 0,$$

qualquer que seja a condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^r$. Suponhamos, por redução ao absurdo, que existe $x_0 \in \mathbb{R}^r$, para o qual a igualdade acima é falsa. Então, existem $\epsilon_0 > 0$ e uma subseqência de (x_n), a qual denotaremos da mesma forma, tais que

$$|x_n| > \epsilon_0, \qquad \forall n \geq 0,$$

daqui, dado que ω_2 é não-decrescente, obtemos

$$\omega_2(|x_n|) \geq \omega_2(\epsilon_0) > 0, \qquad \forall n \geq 0. \tag{3.5}$$

Por outro lado, somando os termos de (3.4) de 0 até m fixo, obtem-se

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{m} \omega_2(|x_n|) &\leqslant \sum_{n=0}^{m} (V(n, x_0, ..., x_n) - V(n+1, x_0, ..., x_{n+1})) \\ &= V(0, x_0) - V(m+1, x_0, ..., x_{m+1}) \\ &\leqslant V(0, x_0). \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $m \to \infty$ na desigualdade anterior, concluímos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_2(|x_n|) < \infty,$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty} \omega_2(|x_n|) = 0,$$

o que está em contradição com (3.5), e portanto o Teorema se verifica. ■

Os teoremas desta seção darão condições suficientes para que a solução nula de algumas EDV's tenha estabilidade assintótica global. O procedimento desenvolvido em suas demonstrações estará baseado no teorema anterior e será o seguinte: para cada EDV dada definiremos uma função de Lyapunov V, a qual dependerá dos coeficientes da EDV no caso linear e, no caso da EDV ser não-linear, dos coeficientes e função responsável pela não-linearidade, de tal forma que se cumpram as hipóteses do teorema anterior.

As EDV's que estudaremos nesta seção apresentam a seguinte forma geral:

$$x_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} F(n, j, x_j).$$

Iniciaremos estudando a estabilidade de uma equação escalar do tipo convolução,

$$x_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} a_j x_{n-j}, \tag{3.6}$$

cujos coeficientes são pequenos.

Teorema 3.2 *Se a sequência de coeficientes (a_k), da EDV acima, satisfaz*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < 1,$$

então a solução nula daquela EDV tem estabilidade assintótica global.

Prova: Vamos em busca de uma função de Lyapunov V e de funções ω_1, ω_2, nas condições do Teorema anterior. Definindo

$$V(n, y_0, ..., y_n) = |y_n| + \sum_{j=1}^{n} |y_{n-j}| \sum_{k=j}^{\infty} |a_k|, \qquad \forall n \geq 1,$$

$$V(0, y) = |y|,$$

vemos que $V(0, y)$ é contínua e que podemos tomar ω_1 como sendo a função identidade. Claramente, tem-se que

$$V(n, x_0, ..., x_n) \geq \omega_1(|x_n|), \qquad \forall n \geq 0.$$

Logo, segundo o Teorema anterior, para garantir que a solução nula de (3.6) tem estabilidade assintótica global, resta exibir uma função ω_2 que cumpra

$$\Delta V \leqslant -\omega_2(|x_n|), \qquad \forall n \geq 0.$$

Aplicando Δ na expressão que define V, obtemos que para cada $n \geq 1$:

$$\Delta V = |x_{n+1}| - |x_n| + \sum_{j=1}^{n+1} |x_{n+1-j}| \sum_{k=j}^{\infty} |a_k| - \sum_{j=1}^{n} |x_{n-j}| \sum_{k=j}^{\infty} |a_k|\,.$$

Fazendo a mudança de índices $i = j - 1$ no primeiro somatório acima obtemos,

$$\Delta V = |x_{n+1}| - |x_n| + \underbrace{\sum_{i=0}^{n} |x_{n-i}| \sum_{k=i+1}^{\infty} |a_k| - \sum_{j=1}^{n} |x_{n-j}| \sum_{k=j}^{\infty} |a_k|}_{:=\alpha} \tag{3.7}$$

Agora vamos trabalhar com os somatórios da igualdade acima.

$$\begin{aligned}
\alpha &= |x_n| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + \sum_{i=1}^{n} |x_{n-i}| \sum_{k=i+1}^{\infty} |a_k| - \sum_{j=1}^{n} |x_{n-j}| \left(|a_j| + \sum_{k=j+1}^{\infty} |a_k| \right) \\
&= |x_n| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum_{j=1}^{n} |x_{n-j}||a_j| = |x_n| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum_{i=1}^{\infty} |a_i x_{n-i}|
\end{aligned}$$

Usando esta igualdade em (3.7), conseguimos

$$\begin{aligned}
\Delta V &= |x_{n+1}| - |x_n| + |x_n| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum_{i=1}^{\infty} |a_i x_{n-i}| \\
&= |x_{n+1}| - \sum_{i=1}^{\infty} |a_i x_{n-i}| + |x_n| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - 1 \right). \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Note que as duas primeiras expressões no lado direito da igualdade anterior são muito parecidas com as expressões que aparecem na equação (3.6). Agora, usando a desigualdade triangular em (3.6) obtemos

$$|x_{n+1}| - \sum_{i=0}^{n} |a_i\, x_{n-i}| \leqslant 0,$$

portanto,

$$|x_{n+1}| - \sum_{i=0}^{\infty} |a_i x_{n-i}| \leqslant 0.$$

As duas primeiras parcelas no segundo membro de (3.8) são parte do que aparece no primeiro membro da última desigualdade. De fato, no somatório acima, i varia de 0 a ∞, enquanto que em (3.8) i varia de 1 a ∞. A idéia agora é explorar a semelhança entre o lado esquerdo da desigualdade anterior e as duas primeiras parcelas no lado direito de (3.8) para encontrar uma função que majore ΔV. Escrevendo as duas primeiras parcelas de (3.8) de forma conveniente e usando a desigualdade acima, consegue-se

$$\begin{aligned} |x_{n+1}| - \sum_{i=1}^{\infty} |a_i x_{n-i}| &= |x_{n+1}| - \sum_{i=0}^{\infty} |a_i x_{n-i}| + |a_0||x_n| \\ &\leqslant |a_0||x_n|. \end{aligned}$$

Então, voltando a (3.8) obtemos

$$\Delta V \leqslant |a_0||x_n| + |x_n| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - 1 \right).$$

Finalmente, colocando $|x_n|$ em evidência na expressão acima, conseguimos

$$\Delta V \leqslant |x_n| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| - 1 \right), \qquad \forall n \geq 1.$$

Além disso, é simples verificar que

$$V(1, x_1, x_0) - V(0, x_0) \leqslant |x_0| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| - 1 \right).$$

As duas últimas desigualdades nos permitem escrever

$$\Delta V \leqslant |x_n| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| - 1 \right), \qquad \forall n \geq 0.$$

Como $k_0 = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ é positivo, por hipótese, então da última desigualdade, segue a conclusão do Teorema. ∎

Exemplo 3.1 *Como aplicação do Teorema 3.2, vejamos que a solução da EDV*

$$x_{n+1} = \frac{1}{3} x_n + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} x_{n-j},$$

tem estabilidade assintótica global.

Usando a notação do Teorema anterior vemos que a sequência de coeficientes (a_k) da EDV acima, é dada por

$$a_0 = \frac{1}{3} \qquad \text{e} \qquad a_k = \frac{1}{2k(k+1)}, \quad k \geq 1.$$

Provemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < 1.$$

Denotando a soma parcial de ordem k desta série por s_k, obtemos

$$\begin{aligned} s_k &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}\right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right), \end{aligned}$$

logo

$$s_k \to \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6},$$

quando $k \to \infty$. Isto significa que

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \frac{5}{6} < 1,$$

como queríamos. $\square$

Veremos agora condições suficientes para que a solução nula da EDV não-linear dada abaixo, tenha estabilidade assintótica global

$$x_{n+1} = -\sum_{j=0}^{n} a_{n,j} g(x_j), \tag{3.9}$$

onde $x_j \in \mathbb{R}^r$, $a_{n,j} = a_{n,j}^\top \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e $g \colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ é uma função contínua satisfazendo $g(0) = 0$. Para isto, utilizamos a função de Lyapunov definida em $\mathbb{Z}^+ \times S_r$, dada por

$$\begin{aligned} V(n, y_0, ..., y_n) \;\; &:= \;\; 2y_n^\top g(y_n) - g(y_n)^\top a_{n-1,n} g(y_n) + \sum_{j=0}^{n} g(y_j)^\top a_{n-1,-1} \sum_{j=0}^{n} g(y_j) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{n} \left[\left(\sum_{l=j}^{n} g(y_l)^\top \right) (a_{n-1,j-1} - a_{n-1,j}) \sum_{l=j}^{n} g(y_l) \right], \end{aligned}$$

onde além das matrizes $a_{n,j}$, $n \geq j \geq 0$ dadas em (3.9), também são consideradas matrizes $a_{n-1,-1}$, $a_{n-1,n}$ para $n \geq 0$, simétricas tais que:

$$a_{n-1,-1} \text{ é não-negativa definida },$$

$$a_{n,-1} - a_{n-1,-1} \quad \text{e} \quad a_{n-1,j-1} - a_{n-1,j} \text{ são não-positivas definidas,}$$

$$a_{n,j-1} - a_{n,j} - a_{n-1,j-1} + a_{n-1,j} \text{ é não-negativa definida,}$$

$$\forall y \neq 0 : \quad 2y^\top g(y) - g(y)^\top a_{n-1,n} g(y) > 0,$$

$$2y^\top g(y) - g(y)^\top a_{n-1,n} g(y) \to \infty, \quad \text{quando } |y| \to \infty.$$

Teorema 3.3 *Se as matrizes $a_{n,j}$ e a função g são como mencionadas acima, então, a solução nula da EDV (3.9) tem estabilidade assintótica global.*

Prova: Vejamos que o Funcional de Lyapunov definido acima satisfaz as hipóteses do teorema anterior. Primeiramente vamos encontrar uma função ω_1, tal que para cada $n \geq 0$:

$$V(n, x_0, ..., x_n) \geq \omega_1(|x_n|).$$

Usando as hipóteses de que as matrizes $a_{n-1,-1}$ e $a_{n-1,j-1} - a_{n-1,j}$ são, respectivamente, não-negativa definida e não-positiva definida, obtemos, da expressão que define V, a seguinte desigualdade

$$V(n, x_0, ..., x_n) \geq 2x_n^\top g(x_n) - g(x_n)^\top a_{n-1,n} g(x_n), \qquad \forall n \geq 0.$$

Seja $\psi : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ uma função dada por

$$\psi(x_n) = 2x_n^\top g(x_n) - g(x_n)^\top a_{n-1,n} g(x_n).$$

É simples verificar que ψ cumpre todas as condições que, segundo a Proposição 2.2, garantem a existência de uma função ω_1 satisfazendo

$$\psi(x_n) \geq \omega_1(|x_n|), \qquad \forall n \geq 0. \tag{3.10}$$

Assim, das três últimas expressões, vem o que buscávamos:

$$V(n, x_0, ..., x_n) \geq \omega_1(|x_n|), \qquad \forall n \geq 0.$$

Por outro lado, da definição de V, segue que

$$V(0, y) \;=\; 2y^\top g(y),$$

é uma função contínua em $y \in \mathbb{R}^r$. Tendo obtido as duas últimas expressões concluímos que para provar o Teorema resta encontrar uma função ω_2, tal que

$$\Delta V \leqslant -\omega_2(|x_n|), \qquad \forall n \geq 0.$$

Aplicando Δ às duas primeiras parcelas de V obtemos

$$\begin{aligned}\Delta[2x_n^\top g(x_n) - g(x_n)^\top a_{n-1,n} g(x_n)] \;&=\; 2x_{n+1}^\top g(x_{n+1}) - g(x_{n+1})^\top a_{n,n+1} g(x_{n+1}) \\ &\quad -2x_n^\top g(x_n) + g(x_n)^\top a_{n-1,n} g(x_n).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Agora, aplicando Δ à terceira parcela de V conseguimos

$$\begin{aligned}\Delta\left(\sum_{j=0}^{n} g(x_j)^\top a_{n-1,-1} \sum_{j=0}^{n} g(x_j)\right) \;&=\; \sum_{j=0}^{n+1} g(x_j)^\top a_{n,-1} \sum_{j=0}^{n+1} g(x_j) \\ &\quad -\sum_{j=0}^{n} g(x_j)^\top a_{n-1,-1} \sum_{j=0}^{n} g(x_j).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Para simplificar a notação, denotamos a quarta parcela de V por $G_1(n)$. Desta forma, podemos escrever o resultado da aplicação do operador Δ a esta parcela como

$$\Delta G_1(n) = G_1(n+1) - G_1(n), \tag{3.13}$$

onde

$$\begin{aligned}G_1(n+1) \;&=\; -\sum_{j=0}^{n+1}\left[\left(\sum_{l=j}^{n+1} g(x_l)^\top\right)(a_{n,j-1} - a_{n,j}) \sum_{l=j}^{n+1} g(x_l)\right] \\ &=\; -g(x_{n+1})^\top (a_{n,n} - a_{n,n+1}) g(x_{n+1}) + G_2,\end{aligned} \tag{3.14}$$

sendo

$$\begin{aligned} G_2 &= -\sum_{j=0}^{n}\left[\left(\sum_{l=j}^{n+1} g(x_l)^\top\right)(a_{n,j-1}-a_{n,j})\sum_{l=j}^{n+1} g(x_l)\right] \\ &= -\sum_{j=0}^{n}\left[\left(g(x_{n+1})^\top+\sum_{l=j}^{n} g(x_l)^\top\right)(a_{n,j-1}-a_{n,j})\left(g(x_{n+1})+\sum_{l=j}^{n} g(x_l)\right)\right] \end{aligned}$$

Usando a distributividade na última igualdade obtemos a expressão

$$\begin{aligned} G_2 &= -\sum_{j=0}^{n} g(x_{n+1})^\top(a_{n,j-1}-a_{n,j})g(x_{n+1}) - \sum_{j=0}^{n} g(x_{n+1})^\top(a_{n,j-1}-a_{n,j})\sum_{l=j}^{n} g(x_l) \\ &\quad -\sum_{j=0}^{n}\sum_{l=j}^{n} g(x_l)^\top(a_{n,j-1}-a_{n,j})g(x_{n+1}) - \sum_{j=0}^{n}\sum_{l=j}^{n} g(x_l)^\top(a_{n,j-1}-a_{n,j})\sum_{l=j}^{n} g(x_l) \end{aligned}$$

A hipótese de simetria da matriz $a_{n,j}$, implica na simetria da matriz $a_{n,j-1}-a_{n,j}$, donde concluímos que a segunda e a terceira parcelas na igualdade acima coincidem, portanto podemos escrever

$$\begin{aligned} G_2 &= -g(x_{n+1})^\top\sum_{j=0}^{n}(a_{n,j-1}-a_{n,j})g(x_{n+1}) - 2g(x_{n+1})^\top\sum_{j=0}^{n}(a_{n,j-1}-a_{n,j})\sum_{l=j}^{n} g(x_l) \\ &\quad -\sum_{j=0}^{n}\sum_{l=j}^{n} g(x_l)^\top(a_{n,j-1}-a_{n,j})\sum_{l=j}^{n} g(x_l). \end{aligned}$$

Usando este resultado em (3.14), obtemos

$$\begin{aligned} G_1(n+1) &= \underbrace{-g(x_{n+1})^\top(a_{n,n}-a_{n,n+1})g(x_{n+1}) - g(x_{n+1})^\top\sum_{j=0}^{n}(a_{n,j-1}-a_{n,j})g(x_{n+1})}_{:=\beta} \\ &\quad -2g(x_{n+1})^\top\underbrace{\sum_{j=0}^{n}(a_{n,j-1}-a_{n,j})\sum_{l=j}^{n} g(x_l)}_{:=\gamma} \\ &\quad -\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{l=j}^{n} g(x_l)^\top\right)(a_{n,j-1}-a_{n,j})\sum_{l=j}^{n} g(x_l). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Usando a distributividade na primeira parcela do segundo membro da igualdade anterior, e notando que o somatório que aparece na segunda parcela deste membro representa uma soma telescópica, concluímos que

$$\beta = g(x_{n+1})^\top a_{n,n+1} g(x_{n+1}) - g(x_{n+1})^\top a_{n,-1} g(x_{n+1}). \tag{3.16}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\gamma &= (a_{n-1} - a_{n,0}) \sum_{l=0}^{n} g(x_l) + (a_{n,0} - a_{n,1}) \sum_{l=1}^{n} g(x_l) \\
&\quad + (a_{n,1} - a_{n,2}) \sum_{l=2}^{n} g(x_l) + \cdots + (a_{n,n-1} - a_{n,n}) \sum_{l=n}^{n} g(x_l) \\
&= (a_{n,-1} - a_{n,0})(g(x_0) + g(x_1) + \cdots + g(x_n)) \\
&\quad + (a_{n,0} - a_{n,1})(g(x_1) + g(x_2) + \cdots + g(x_n)) + \cdots + (a_{n,n-1} - a_{n,n}) g(x_n) \\
&= (a_{n,-1} - a_{n,0}) g(x_0) + (a_{n,-1} - a_{n,1}) g(x_1) + \cdots + (a_{n,-1} - a_{n,n}) g(x_n) \\
&= \sum_{l=0}^{n} (a_{n,-1} - a_{n,l}) g(x_l) \\
&= \sum_{l=0}^{n} a_{n,-1} g(x_l) - \sum_{l=0}^{n} a_{n,l} g(x_l) \\
&= a_{n,-1} \sum_{l=0}^{n} g(x_l) + x_{n+1},
\end{aligned}$$

onde a última igualdade foi obtida de (3.9). Podemos usar a igualdade anterior para reescrever a primeira parcela da segunda linha de (3.15) como

$$-2g(x_{n+1})^\top \sum_{j=0}^{n} (a_{n,j-1} - a_{n,j}) \sum_{l=j}^{n} g(x_l) = -2g(x_{n+1})^\top a_{n,-1} \sum_{l=0}^{n} g(x_l) - 2g(x_{n+1})^\top x_{n+1}.$$

Usando esta igualdade e (3.16) em (3.15) obtemos,

$$\begin{aligned}
G_1(n+1) &= g(x_{n+1})^\top a_{n,n+1} g(x_{n+1}) - g(x_{n+1})^\top a_{n,-1} g(x_{n+1}) \\
&\quad -2g(x_{n+1})^\top a_{n,-1} \sum_{l=0}^{n} g(x_l) - 2g(x_{n+1})^\top x_{n+1} \\
&\quad - \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{l=j}^{n} g(x_l)^\top \right) (a_{n,j-1} - a_{n,j}) \sum_{l=j}^{n} g(x_l) \\
&= -g(x_{n+1})^\top (a_{n,-1} - a_{n,n+1}) g(x_{n+1}) \\
&\quad -2g(x_{n+1})^\top a_{n,-1} \sum_{l=0}^{n} g(x_l) - 2x_{n+1}^\top g(x_{n+1})
\end{aligned}$$

$$-\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{l=j}^{n} g(x_l)^\top\right)(a_{n,j-1}-a_{n,j})\sum_{l=j}^{n} g(x_l).$$

Usamos esta igualdade em (3.13) para concluir que Δ aplicado à quarta parcela de V é

$$\begin{aligned}\Delta G_1(n) &= -g(x_{n+1})^\top(a_{n,-1}-a_{n,n+1})g(x_{n+1}) - 2g(x_{n+1})^\top a_{n,-1}\sum_{l=0}^{n} g(x_l)\\ &\quad -2x_{n+1}^\top g(x_{n+1}) - \sum_{j=0}^{n}\sum_{l=j}^{n} g(x_l)^\top(a_{n,j-1}-a_{n,j})\sum_{l=j}^{n} g(x_l)\\ &\quad +\sum_{j=0}^{n}\sum_{l=j}^{n} g(x_l)^\top(a_{n-1,j-1}-a_{n-1,j})\sum_{l=j}^{n} g(x_l). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Finalmente, somando (3.11), (3.12) e (3.17), obtemos

$$\begin{aligned}\Delta V &= 2x_{n+1}^\top g(x_{n+1}) - g(x_{n+1})^\top a_{n,n+1}g(x_{n+1}) - 2x_n^\top g(x_n) + g(x_n)^\top a_{n-1,n}g(x_n)\\ &\quad +\sum_{j=0}^{n+1} g(x_j)^\top a_{n,-1}\sum_{j=0}^{n+1} g(x_j) - \sum_{j=0}^{n} g(x_j)^\top a_{n-1,-1}\sum_{j=0}^{n} g(x_j)\\ &\quad -g(x_{n+1})^\top(a_{n,-1}-a_{n,n+1})g(x_{n+1}) - 2g(x_{n+1})^\top a_{n,-1}\sum_{l=0}^{n} g(x_l)\\ &\quad -2x_{n+1}^\top g(x_{n+1}) - \sum_{j=0}^{n}\sum_{l=j}^{n} g(x_l)^\top(a_{n,j-1}-a_{n,j})\sum_{l=j}^{n} g(x_l)\\ &\quad +\sum_{j=0}^{n}\sum_{l=j}^{n} g(x_l)^\top(a_{n-1,j-1}-a_{n-1,j})\sum_{l=j}^{n} g(x_l), \end{aligned}$$

Após alguma manipulação no lado direito dessa igualdade consegue-se a seguinte expressão para ΔV:

$$\begin{aligned}\Delta V &= -2x_n^\top g(x_n) + g(x_n)^\top a_{n-1,n}g(x_n) - \sum_{l=0}^{n} g(x_{n+1})^\top a_{n,-1}g(x_l)\\ &\quad -\sum_{j=0}^{n}\sum_{l=j}^{n} g(x_l)^\top(a_{n,j-1}-a_{n,j}-a_{n-1,j-1}+a_{n-1,j})\sum_{l=j}^{n} g(x_l)\\ &\quad +\sum_{j=0}^{n} g(x_j)^\top(a_{n,-1}-a_{n-1,-1})\sum_{j=0}^{n} g(x_j) + \sum_{j=0}^{n} g(x_j)^\top a_{n,-1}g(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Devido à simetria da matriz $a_{n,-1}$, segue que a última parcela da primeira linha e a última parcela da terceira linha da igualdade acima se anulam, portanto podemos escrever

$$\begin{aligned}\Delta V &= -2x_n^\top g(x_n) + g(x_n)^\top a_{n-1,n} g(x_n) + \sum_{j=0}^{n} g(x_j)^\top (a_{n,-1} - a_{n-1,-1}) \sum_{j=0}^{n} g(x_j) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=j}^{n} g(x_l)^\top (a_{n,j-1} - a_{n,j} - a_{n-1,j-1} + a_{n-1,j}) \sum_{l=j}^{n} g(x_l).\end{aligned}$$

Daqui e das hipóteses que afirmam respectivamente, que a matriz $a_{n,-1} - a_{n-1,-1}$ é não-positiva definida, e que a matriz $a_{n,j-1} - a_{n,j} - a_{n-1,j-1} + a_{n-1,j}$ é não-negativa definida, obtemos

$$\Delta V \leqslant -2x_n^\top g(x_n) + g(x_n)^\top a_{n-1,n} g(x_n) = -\psi(x_n),$$

e portanto, usando (3.10) na desigualdade acima, obtem-se a desigualdade que encerra a prova do teorema:

$$\Delta V \leqslant -\omega_1(|x_n|).$$

■

Observação 3.1 *Suponhamos que as matrizes $a_{n,j}$ dadas em (3.9), são não negativas definidas satisfazendo as seguintes relações:*

$$a_{n+1,0} - a_{n,0} \quad e \quad a_{n,j} - a_{n,j+1}$$

são não positiva definidas, a primeira para $n \geq 0$ e a segunda para $0 \leqslant j < j+1 \leqslant n$, e

$$a_{n,j-1} - a_{n,j} - a_{n-1,j-1} + a_{n-1,j}$$

é não positiva definida para $0 \leqslant j-1 < j+1 \leqslant n$. *Neste caso, se para cada $n \geq 0$ existir uma matriz $a_{n-1,n}$ tal que*

$$a_{n,n-1} - a_{n,n} - a_{n-1,n-1} + a_{n-1,n}$$

é não negativa definida (quando $n = 0$, além de $a_{-1,0}$ tem que existir uma outra matriz $a_{-1,-1}$ de tal forma que a afirmação anterior seja satisfeita) e

$$2x^\top g(x) - g(x)^\top a_{n-1,n} g(x) > 0, \quad \forall x \neq 0,$$

então é possível contruir matrizes $a_{n,-1}$ *com* $n \geq 0$*, tal que as condições do Teorema anterior sejam cumpridas.*

Observação 3.2 *Estudamos acima uma EDV não-linear do tipo não-convolução. Um caso particular é a seguinte EDV não-linear de convolução , isto é,* $a_{n,j} = a_{n-j}$*:*

$$x_{n+1} = -\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} g(x_j). \tag{3.18}$$

Neste caso as condições sobre os coeficientes e sobre a função g*, da equação acima, que garantem a estabilidade assintótica global de sua solução nula, seguem das condições da observação anterior, fazendo* $a_{n,j} = a_{n-j}$*, e são as seguintes:*

$$a_j \ \text{ é simétrica não-negativa definida}, \ \ j = 0, 1, ...;$$

$$a_{j+1} - a_j \ \text{ é não-positiva definida}, \ \ j = -1, 0, 1...;$$

g *é uma função contínua satisfazendo* $g(0) = 0$*, e existe* $a_{-1} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ *simétrica tal que*

$$a_{j+1} - 2a_j + a_{j-1} \ \text{ é não-negativa definida}, \ \ j = 0, 1...;$$

$$2y^\top g(y) - g(y)^\top a_{-1} g(y) > 0, \quad \forall y \neq 0.$$

Vejamos uma aplicação no caso bidimensional.

Exemplo 3.2 *Se em (3.18), consideramos uma equação bidimensional tomando*

$$a_j = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{j+3} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{j+3} \end{pmatrix},$$

$$g(y_1, y_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(y_1 e^{y_1}, y_2 e^{y_2}) & se \quad y_1 < \ln 2 \quad e \quad y_2 < \ln 2 \\ (y_1, y_2) & se \quad y_1 \geq \ln 2 \quad ou \quad y_2 \geq \ln 2 \end{cases}$$

então sua solução nula terá estabilidade assintótica global.

Para mostrar isso, vamos ver que todas as condições dadas na Observação anterior são cumpridas. Claramente a_j é simétrica. Além disso, o autovalor de a_j é

$$\frac{1}{j+3} > 0,$$

donde segue que a_j é positiva-definida. Vejamos agora que as matrizes $a_{j+1} - a_j$ e $a_{j+1} - 2a_j + a_{j-1}$ são, respectivamente, não-positiva definida e não-negativa definida. Ora, o autovalor de $a_{j+1} - a_j$ é (o elemento que aparece em sua diagonal)

$$\frac{1}{j+4} - \frac{1}{j+3} < 0,$$

o que implica que essa matriz é negativa definida. Por outro lado, o autovalor da matriz $a_{j+1} - 2a_j + a_{j-1}$ é

$$\frac{1}{j+4} - \frac{2}{j+3} + \frac{1}{j+2} = \frac{2}{(j+4)(j+3)(j+2)} > 0,$$

o que mostra que tal matriz é positiva definida. Agora vamos ver que a função g definida acima, é como na observação (3.2). É simples mostrar que esta função é contínua e que $g(0) = 0$. Para finalizar, resta provar que existe uma matriz $a_{-1} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, simétrica e não-negativa definida, tal que

$$2y^\top g(y) - g(y)^\top a_{-1} g(y) > 0, \qquad \forall y \neq 0.$$

Vejamos que a desigualdade acima pode ser obtida tomando $a_{-1} = I$, a matriz identidade em $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Seja $y = (y_1, y_2) \neq (0,0)$. Se $y_1, y_2 < \ln 2$, então

$$\begin{aligned} 2y^\top g(y) - g(y)^\top I g(y) &= (y_1, y_2)^\top (y_1 e^{y_1}, y_2 e^{y_2}) - \frac{1}{4}(y_1 e^{y_1}, y_2 e^{y_2})^\top (y_1 e^{y_1}, y_2 e^{y_2}) \\ &= y_1^2 e^{y_1} + y_2^2 e^{y_2} - \frac{1}{4} y_1^2 e^{2y_1} - \frac{1}{4} y_2^2 e^{2y_2} \\ &= y_1^2 e^{y_1}\left(1 - \frac{e^{y_1}}{4}\right) + y_2^2 e^{y_2}\left(1 - \frac{e^{y_2}}{4}\right) \\ &> 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

A última desigualdade vem de que $y_1, y_2 < \ln 2$ e de que $y_1 \neq 0$ ou $y_2 \neq 0$. De fato,

$$y_1 < \ln 2 \quad \therefore \quad -2 < -e^{y_1} \quad \therefore \quad -\frac{1}{2} < -\frac{e^{y_1}}{4} \quad \therefore \quad \frac{1}{2} < 1 - \frac{e^{y_1}}{4}$$

Donde segue que a primeira expressão entre parênteses em (3.19) é positiva. De modo análogo mostra-se que a segunda expressão entre parênteses naquela igualdade é positiva. Finalmente, como $y_1 \neq 0$ ou $y_2 \neq 0$ segue que pelo menos uma das parcelas do segundo membro de (3.19) é positiva (e a outra é, na pior das hipóteses, igual a 0). Suponhamos agora que $y_1 \geq \ln 2$ ou $y_2 \geq \ln 2$. Então,

$$\begin{aligned} 2y^\top g(y) - g(y)^\top I g(y) &= (2y_1, 2y_2)^\top (y_1, y_2) - (y_1, y_2)^\top (y_1, y_2) \\ &= 2y_1^2 + 2y_2^2 - y_1^2 - y_2^2 \\ &= y_1^2 + y_2^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

□

Observação 3.3 *Para o caso particular de equação escalar linear de convolução:*

$$x_{n+1} = -\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} x_j \tag{3.20}$$
$$x_j \in \mathbb{R}, \;\; a_j \in \mathbb{R},$$

Kolmanovskii et al. [8], utilizam uma função de Lyapunov diferente daquela fornecida pelo teorema 3.3, dada por

$$\begin{aligned} V(n, y_0, ..., y_n) &= (2 - a_{-1}) y_n^2 + a_{n+1} \left(\sum_{j=0}^{n} y_j \right)^2 \\ &\quad - \sum_{j=0}^{n} (a_{n+1-j} - a_{n-j}) \left(\sum_{l=j}^{n} y_l \right)^2, \end{aligned}$$

Com cálculos análogos aos realizados na prova do Teorema (3.3) mostra-se que

$$\begin{aligned} \Delta V &= (a_{n+2} - a_{n+1}) \left(\sum_{j=0}^{n+1} x_j \right)^2 - \sum_{j=0}^{n+1} (a_{n+2-j} - 2a_{n+1-j} + a_{n-j}) \left(\sum_{l=j}^{n+1} x_l \right)^2 \\ &\quad -(2 - a_{-1}) x_n^2. \end{aligned}$$

Assim, vemos que as seguintes condições garantem a estabilidade assintótica global da solução nula de (3.20):

A constante a_{-1} introduzida na definição de V deve satisfazer $2a_0 - a_1 \leqslant a_{-1} < 2$;

$$0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n, \qquad \forall n \geq 0;$$

$$a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} \geq 0, \qquad \forall n \geq 1.$$

Note que na definição de V estamos introduzindo a constante a_{-1} cumprindo a primeira condição dada acima, e portanto esta função V é útil para estudar a estabilidade da equação (3.20) quando $2a_0 - a_1 < 2$.

Como aplicação deste resultado apresentamos os dois seguintes casos particulares:

Exemplo 3.3 *Consideremos $0 < a < 2$. As soluções nulas das EDV's abaixo têm estabilidade assintótica global:*

$$x_{n+1} = -a \sum_{j=0}^{n} x_j, \qquad x_{n+1} = -\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j+1} x_j.$$

De fato, no primeiro caso a sequência de coeficientes é a sequência constante $a_n = a$, que óbviamente satisfaz as condições dadas na observação anterior.

Quanto à segunda EDV, a sequência de coeficientes é dada por

$$a_n = \frac{1}{n+1}, \qquad n \geq 0,$$

que é decrescente e tem todos os termos não-negativos. Verifiquemos que vale a desigualdade $2a_0 - a_1 < 2$. Segue imediatamente da definição de (a_n) que

$$2a_0 - a_1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < 2.$$

Para finalizar, vejamos que

$$a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} \geq 0, \qquad \forall n \geq 1. \tag{3.21}$$

Para cada $n \geq 1$:

$$n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n \quad \Rightarrow \quad \frac{n+1}{n(n+2)} > \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{n+2+n}{2n(n+2)} > \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}}{2} > \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} > a_n,$$

donde segue (3.21). Assim, concluímos que (a_n) cumpre todos os requisitos que, segundo a observação 3.3 garantem que a solução nula da segunda EDV dada acima, tem estabilidade assintótica global. □

3.2 Funções de Lyapunov com Diferenças Não Negativas

Diferentemente da seção anterior, na qual investigamos a estabilidade da solução nula através de funções auxiliares V, com primeira diferença não-positiva ao longo das trajetórias, nesta seção, obtemos informações sobre estabilidade da solução nula de uma EDV mediante o uso de funções auxiliares V, cuja primeira diferença não necessariamente é negativa ao longo das trajetórias. Outra diferença em relação à seção anterior, é que nesta parte do trabalho $V(n,\cdot)$ não depende de x_j, para $j \neq n$. Por outro lado, da mesma forma que na seção precedente, consideramos funções V não-negativas. Podemos resumir as características básicas das funções V utilizadas aqui, escrevendo:

$$V(n, y_0, \ldots, y_n, \ldots) = V(n, y_n) \geq 0, \qquad \forall y_n \in \mathbb{R}^r, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{3.22}$$

Na presente seção, desejamos obter condições suficientes para a estabilidade e estabilidade assintótica da solução nula de EDV's homogêneas escalares que apresentam a seguinte forma geral

$$x_{n+1} = H(n, x_0, \ldots, x_n), \tag{3.23}$$

e assumiremos que a solução $x(n, 0, x_0)$ depende continuamente dos dados iniciais. A partir deste momento convém, por economia de notação, convencionarmos que:

$$v_n := V(n, x_n).$$

Os dois próximos resultados estudados por V. B. Kolmanovskii e colaboradores [8], dão respectivamente condições suficientes para a estabilidade e estabilidade assintótica global da solução nula da equação (3.23).

Teorema 3.4 *Para que a solução nula de (3.23) seja estável é suficiente que existam uma função* $V\colon \mathbb{Z}^+ \times S_1 \to \mathbb{R}$*, satisfazendo (3.22) e tal que, para cada* $n \in \mathbb{Z}^+$*,* $V(n,0) = 0$ *e* $V(n,y)$ *é contínua em* $y = 0$*, K-funções* ω_1, ω_2*, e uma função* $\gamma\colon \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$*, de modo que as seguintes relações sejam satisfeitas*

$$V(n, x_n) \geq \omega_1(|x_n|), \ \ \forall x_n \in \mathbb{R}^r;$$

$$\Delta V \leqslant -a_n\omega_2(v_{n+1}) + \sum_{j=0}^{n} \gamma(n,j)\omega_2(v_j), \tag{3.24}$$

ao longo das trajetórias, onde

$$a_n > 0, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+;$$

$$\gamma(n,j) \geq 0, \qquad 0 \leqslant j \leqslant n;$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} \sum_{j=0}^{n} \gamma(n,j) = 0.$$

Prova: Devemos mostrar que para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que,

$$|x_0| < \delta \Rightarrow |x_n| < \epsilon, \qquad \forall n \geq 0,$$

onde estamos denotando com x_n a $x(n, 0, x_0)$. Para provar a implicação acima, a idéia é separar em duas partes. Primeiro mostramos que existe $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, tal que a implicação acima é válida para cada $n \in [0, n_0]$ (onde $[0, n_0]$ denota os inteiros desse intervalo). Em seguida mostraremos que tal implicação é válida para para os restantes $n > n_0$.

Fixemos $\epsilon > 0$. Seja $0 < \alpha < 1$. A hipótese de que $a_n^{-1}\sum_{j=0}^{n}\gamma(n,j) \to 0$ quando $n \to \infty$, garante a existência de $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, tal que

$$a_n^{-1}\sum_{j=0}^{n}\gamma(n,j) < \alpha, \qquad \forall n \geq n_0. \tag{3.25}$$

Como $\omega_1(\epsilon) > 0$. e para cada $n \in [0, n_0]$ fixado, $V(n, y)$ é uma função de $y \in \mathbb{R}$, contínua em $y = 0$, então, para cada $n \in [0, n_0]$ fixado, existe $\delta_n = \delta_n(\epsilon) > 0$, tal que

$$|y| < \delta_n \Rightarrow |V(n,y) - V(n,0)| < \omega_1(\epsilon) \qquad i.é. \qquad |y| < \delta_n \Rightarrow V(n,y) < \omega_1(\epsilon).$$

Assim, tomando $\widehat{\delta} = \min\{\delta_0, \ldots, \delta_{n_0}\}$, concluímos que

$$|y| < \widehat{\delta} \Rightarrow V(n,y) < \omega_1(\epsilon), \qquad \forall n \in [0, n_0].$$

Por outro lado, como por hipótese a solução da EDV analisada depende continuamente dos dados iniciais, então existe $0 < \delta < \widehat{\delta}$, tal que

$$|x_0| < \delta \Rightarrow |x_n| < \widehat{\delta}, \qquad \forall n \in [0, n_0].$$

Combinando as duas últimas implicações, obtemos

$$|x_0| < \delta \Rightarrow v_n < \omega_1(\epsilon), \qquad \forall n \in [0, n_0].$$

Daqui, usando a hipótese de que $\omega_1(|x_n|) \leqslant v_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ e a monotonicidade de ω_1, deduzimos que

$$|x_0| < \delta \Rightarrow |x_n| < \epsilon, \qquad \forall n \in [0, n_0]. \tag{3.26}$$

Vamos iniciar neste momento a prova da segunda parte da demonstração, ou seja, vamos mostrar que $|x_n| < \epsilon$, para todo $n > n_0$. Para tanto, mostraremos que $v_n < \omega_1(\epsilon)$ para cada $n > n_0$. Vamos fazer isso por redução ao absurdo. Suponhamos que existe $n > n_0$ tal que $v_n \geq \omega_1(\epsilon)$. Denotemos por n_1 o primeiro momento em que isso ocorre, isto é

$$n < n_1 \Rightarrow v_n < \omega_1(\epsilon) \qquad \text{e} \qquad v_{n_1} \geq \omega_1(\epsilon).$$

Note que o par de expressões acima implica que

$$v_{n_1-1} < v_{n_1} \tag{3.27}$$

Por outro lado, usando a hipótese (3.24) e a monotonicidade de ω_2 obtemos, respectivamente, as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} v_{n_1} - v_{n_1-1} &\leqslant -a_{n_1-1}\omega_2(v_{n_1}) + \sum_{j=0}^{n_1-1} \gamma(n_1-1,j)\omega_2(v_j) \\ &\leqslant -a_{n_1-1}\omega_2(v_{n_1}) + \omega_2(v_{n_1}) \sum_{j=0}^{n_1-1} \gamma(n_1-1,j), \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} v_{n_1} - v_{n_1-1} &\leqslant -\left[1 - (a_{n_1-1})^{-1} \sum_{j=0}^{n_1-1} \gamma(n_1-1,j)\right] a_{n_1-1}\omega_2(v_{n_1}) \\ &\leqslant -(1-\alpha)a_{n_1-1}\omega_2(v_{n_1}) \\ &< 0 \end{aligned}$$

sendo que a segunda desigualdade acima é obtida de (3.25). Da desigualdade anterior segue que

$$v_{n_1} < v_{n_1-1},$$

o que contradiz a desigualdade obtida em (3.27). Portanto

$$v_n < \omega_1(\epsilon), \qquad \forall n > n_0,$$

o que, pela desigualdade $\omega_1(|x_n|) \leqslant v_n$ e monotonicidade de ω_1, implica em

$$|x_n| < \epsilon, \qquad \forall n > n_0.$$

Daqui e de (3.26), concluímos que

$$|x_0| < \delta \Rightarrow |x_n| < \epsilon, \qquad \forall n \geq 0$$

o que encerra a prova do Teorema. ■

Veremos agora que com duas hipóteses adicionais às dadas no último Teorema, teremos garantida a estabilidade assintótica global da solução nula da EDV (3.23).

Teorema 3.5 *Se além das hipóteses do Teorema 3.4, for válido que*

$$\lim_{y\to\infty} \omega_1(y) = \infty \qquad e \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty,$$

então a solução nula da EDV (3.23) tem estabilidade assintótica global.

Prova: Basta mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} x(n,0,x_0) = 0 \quad \text{para toda condição inicial } x_0 \in \mathbb{R}^r,$$

pois a prova de que a solução nula é estável já está feita no Teorema anterior. Fixemos $x_0 \in \mathbb{R}^r$, e tomemos $\epsilon > 0$. Vamos mostrar que existe $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \epsilon.$$

Como $\omega_1(y) \to \infty$ quando $y \to \infty$, segue que existe $\beta > 0$, tal que

$$\omega_1(\beta) > v_n, \qquad \forall n \in [0, n_0],$$

onde n_0 é aquele mencionado em (3.25). Com o mesmo procedimento adotado na prova do Teorema anterior (trocando $\omega_1(\epsilon)$ por $\omega_1(\beta)$,) mostra-se que

$$\omega_1(\beta) > v_n, \qquad \forall n \geq 0. \tag{3.28}$$

Por outro lado, a hipótese de que $a_n^{-1}\sum_{j=0}^{n}\gamma(n,j) \to 0$ quando $n \to \infty$, garante a existência de $n_1 > n_0$, tal que, para cada $n \geq n_1$:

$$a_n^{-1}\sum_{j=0}^{n}\gamma(n,j) < \frac{\omega_2(\omega_1(\epsilon))}{2\omega_2(\omega_1(\beta))}. \tag{3.29}$$

Vamos provar agora que, para cada $n > n_1$:

$$v_n < \omega_1(\epsilon). \tag{3.30}$$

Começamos mostrando que a desigualdade anterior é verdadeira para algum $n > n_1$. Suponhamos, por redução ao absurdo, que $v_n \geq \omega_1(\epsilon)$, para todo $n > n_1$. Então, como ω_2 é não-decrescente tem-se

$$\omega_2(v_n) \geq \omega_2(\omega_1(\epsilon)), \qquad \forall n > n_1. \tag{3.31}$$

Usando a hipótese (3.24), a desigualdade obtida em (3.28) e a monotonicidade de ω_2, obtemos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} v_n - v_{n-1} &\leqslant -a_{n-1}\omega_2(v_n) + \sum_{j=0}^{n-1} \gamma(n-1,j)\omega_2(v_j), \qquad \forall n > n_1 \\ &\leqslant -a_{n-1}\omega_2(v_n) + \omega_2(\omega_1(\beta)) \sum_{j=0}^{n-1} \gamma(n-1,j), \quad \forall n > n_1. \end{aligned}$$

Daqui, usando a desigualdade (3.29) consegue-se

$$\begin{aligned} v_n - v_{n-1} &\leqslant -a_{n-1}\omega_2(v_n) + \omega_2(\omega_1(\beta)) \frac{\omega_2(\omega_1(\epsilon))a_{n-1}}{2\omega_2(\omega_1(\beta))} \\ &= -a_{n-1}\left(\omega_2(v_n) - \frac{\omega_2(\omega_1(\epsilon))}{2}\right), \qquad \forall n > n_1. \end{aligned}$$

Finalmente, usando (3.31) obtemos

$$v_n - v_{n-1} \leqslant -a_{n-1}\frac{\omega_2(\omega_1(\epsilon))}{2}, \qquad \forall n > n_1. \tag{3.32}$$

Por outro lado, como por hipótese a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, existe $n_2 \in \mathbb{Z}^+$, tal que

$$\sum_{j=n_1}^{n_2} a_j > \frac{4\omega_1(\beta)}{\omega_2(\omega_1(\epsilon))}. \tag{3.33}$$

Somando de $n_1 + 1$ até $n_2 + 1$ em (3.32), obtemos,

$$\sum_{n=n_1+1}^{n_2+1} (v_n - v_{n-1}) \leqslant -\frac{\omega_2(\omega_1(\epsilon))}{2} \sum_{n=n_1+1}^{n_2+1} a_{n-1}.$$

Notando que o membro esquerdo desta desigualdade é uma soma telescópica e fazendo a mudança de variáveis: $n - 1 = j$, obtemos:

$$v_{n_2+1} - v_{n_1} \leqslant -\frac{\omega_2(\omega_1(\epsilon))}{2} \sum_{j=n_1}^{n_2} a_j.$$

Daqui e da desigualdade (3.33) resulta

$$\begin{aligned} v_{n_2+1} - v_{n_1} &< -\frac{\omega_2(\omega_1(\epsilon))}{2} \frac{4\omega_1(\beta)}{\omega_2(\omega_1(\epsilon))} \\ &= -2\omega_1(\beta). \end{aligned}$$

Somando v_{n_1} na última desigualdade, usando (3.28) e o fato de que $\omega_1(\beta) > 0$, conseguimos

$$\begin{aligned} v_{n_2+1} &< v_{n_1} - 2\omega_1(\beta) \\ &< -\omega_1(\beta) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Essa contradição encerra a prova de que existe $n > n_1$ para o qual é verdadeira a desigualdade (3.30). Mas queremos mostrar que aquela desigualdade é verdadeira para todo $n > n_1$. Seja $n > n_1$ tal que $v_n < \omega_1(\epsilon)$. Por (3.32) temos que

$$v_{n+1} - v_n \leqslant -a_n \frac{\omega_2(\omega_1(\epsilon))}{2} < 0,$$

e portanto

$$v_{n+1} < v_n < \omega_1(\epsilon).$$

Concluímos assim que vale a desigualdade:

$$v_n < \omega_1(\epsilon), \qquad \forall n > n_1.$$

Daqui, da hipótese $v_n \geq \omega_1(|x_n|)$, e por ω_1 ser não-decrescente, obtem-se

$$|x_n| < \epsilon, \qquad \forall n > n_1$$

provando o Teorema. ■

Veremos agora que o último Teorema pode nos dar condições de obter informações sobre estabilidade da solução nula de uma EDV, através da análise dos seus coeficientes.

Corolário 3.1 *A solução nula da EDV escalar*

$$x_{n+1} = b_n x_n + \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} x_j, \qquad n \geq 0 \tag{3.34}$$

onde, $b_n \neq 0$*,* $0 < \sup_n |b_n| < 1$ *e* $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} |a_{n,j}| = 0$*, tem estabilidade assintótica global.*

Prova: Vamos ver que neste caso são cumpridas todas as hipóteses do Teorema anterior. Sejam V definido em $\mathbb{Z}^+ \times S_1$ dado por $V(n, x_n) = |x_n|$ e $\omega \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, dada por $\omega(x) = |x|$. Então,

$$V(n, x_n) = \omega(|x_n|), \qquad x_n \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x\to\infty} \omega(x) = \infty.$$

Usando a desigualdade triangular na equação (3.34) obtemos,

$$|x_{n+1}| \leqslant |b_n||x_n| + \sum_{j=0}^{n} |a_{n,j}||x_j|,$$

e então

$$|x_n| \geq |b_n|^{-1}|x_{n+1}| - |b_n|^{-1} \sum_{j=0}^{n} |a_{n,j}||x_j|.$$

Da definição de V e da desigualdade acima, obtem-se

$$v_{n+1} - v_n = |x_{n+1}| - |x_n| \leqslant |x_{n+1}|(1 - |b_n|^{-1}) + |b_n|^{-1} \sum_{j=0}^{n} |a_{n,j}|\, |x_j| \,. \tag{3.35}$$

Agora, denotamos $r := \sup_n |b_n|$ e definimos a sequência (a_n) pondo

$$a_n = |b_n|^{-1} - 1.$$

Usando a hipótese de que $r < 1$, obtemos $|b_n| \leqslant r < 1$. Desta desigualdade e da hipótese de que $0 < r < 1$, segue que

$$1 < r^{-1} \leqslant |b_n|^{-1}, \qquad \forall n \in Z^+ \qquad \therefore \qquad 1 < r^{-1} \leqslant \inf_n |b_n|^{-1}.$$

Daqui, usando a definição de (a_n), tem-se

$$\inf_n a_n = \inf_n |b_n|^{-1} - 1 > 0 \qquad \therefore \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty.$$

Consideremos agora a função $\gamma \colon \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$, definida por

$$\gamma(n, j) = |b_n|^{-1} \, |a_{n,j}| \,.$$

Claramente

$$\gamma(n,j) \geq 0, \qquad 0 \leqslant j \leqslant n.$$

As definições de V, ω, (a_n) e γ, nos permitem reescrever a desigualdade obtida em (3.35) da seguinte maneira:

$$v_{n+1} - v_n \leqslant -a_n\omega(v_{n+1}) + \sum_{j=0}^{n} \gamma(n,j)\omega(v_j).$$

Assim, pelo Teorema anterior, para concluir que a solução nula da EDV (3.34) tem estabilidade assintótica global, resta verificar que vale a seguinte igualdade:

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n^{-1} \sum_{j=0}^{n} \gamma(n,j) \right) = 0,$$

ou, usando as definiçãos de (a_n) e de γ:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{|b_n|^{-1} - 1} |b_n|^{-1} \sum_{j=0}^{n} |a_{n,j}| \right) = 0. \tag{3.36}$$

Por hipótese

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} |a_n, j| \to 0.$$

Então, para mostrar que vale a igualdade (3.36), basta verificar que $\left(\frac{|b_n|^{-1}}{|b_n|^{-1} - 1} \right)$ é uma sequência limitada. Vamos começar mostrando que tal sequência é limitada inferiormente. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, $|b_n| < 1$, logo

$$\frac{|b_n|^{-1}}{|b_n|^{-1} - 1} = \frac{1}{1 - |b_n|} > 0, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Para encontrar uma constante que majore a sequência $\left(\frac{1}{1 - |b_n|} \right)$, basta notar que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, $1 - r \leqslant 1 - |b_n|$. De fato, esta desigualdade implica que

$$\frac{1}{1 - |b_n|} \leqslant \frac{1}{1 - r}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Desta forma, temos que a sequência $\left(\frac{1}{1 - |b_n|} \right)$ é limitada, donde segue a igualdade (3.36) que era o que faltava para concluirmos que a solução nula da EDV (3.34) tem estabilidade assintótica global. ■

Neste momento convém observar que se a EDV (3.34) é de convolução, então a hipótese $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}|a_{n,j}| = 0$, somente pode ser cumprida quando a sequência $(a_{n,j})$ é identicamente nula. De fato, neste caso

$$\sum_{j=0}^{n}|a_{n,j}| = \sum_{j=0}^{n}|a_{n-j}| = \sum_{k=0}^{n}|a_k|,$$

portanto

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}|a_k| = \sum_{k=0}^{\infty}|a_k| = 0 \Leftrightarrow a_k = 0, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

Vamos considerar agora um caso particular de EDV que não é de convolução e que cumpre todas as condições que, segundo o Corolário anterior, asseguram que a sua solução nula tem estabilidade assintótica global.

Exemplo 3.4 *Se em (3.34) tomamos*

$$b_n = (n+2)^{-1} \qquad e \qquad a_{n,j} = (nj)^{-1}, \quad j \geq 1, \quad a_{n,0} = 0,$$

então a solução nula daquela EDV terá estabilidade assintóica global.

Nesse caso, óbviamente

$$0 < b_n \qquad \text{e} \qquad 0 < \sup_n b_n < 1.$$

Finalmente, usando a definição de $(a_{n,j})$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}a_{n,j} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{jn} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2^{-1}}{n}+\cdots+\frac{n^{-1}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2^{-1}+\cdots+n^{-1}}{n}\right) = 0.$$

A última igualdade acima segue da Proposição 2.3 tomando $t_n = 1$ e $x_n = \dfrac{1}{n}$. $\square$

3.3 Algumas Equações não Homogêneas

O objetivo dessa seção é obter algumas informações sobre o comportamento assintótico da solução de EDV's não-lineares, não-homogêneas. De maneira mais específica, estamos interessados em estudar a convergência das soluções da seguinte EDV:

$$x_{n+1} = b_n + \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} g(x_j), \qquad n \in \mathbb{N} \tag{3.37}$$

onde, $x_n \in \mathbb{R}^r$, $b_n \in \mathbb{R}^r$ é dado, $a_{n,j} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ e $g\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$. Iniciamos estudando a limitação para a equação linear não-homogênea

$$x_{n+1} = b_n + \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} x_j, \tag{3.38}$$

Teorema 3.6 *Suponha que em (3.38) valem as seguintes condições:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty, \quad |a_{n,j}x_j| \leqslant \alpha_{n,j}|x_j|, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{n,j} < \infty.$$

Então a solução (x_n) daquela equação converge para 0.

Prova: Fixemos ϵ, $0 < \epsilon < 1$. Da convergência das séries $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{n,j}$ segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\sum_{n=n_0}^{k} b_n < \epsilon \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=n_0}^{k}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{n,j} < \epsilon, \qquad \forall k > n_0.$$

Fixemos $n \geq n_0$ e tomemos $k \in \mathbb{N}$, $k > n$. Usando a desigualdade triangular em (3.38) e a hipótese de que $|a_{n,j}x_j| \leqslant \alpha_{n,j}|x_j|$, obtemos

$$|x_{n+1}| \leqslant |b_n| + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{n,j}|x_j|.$$

Somando de n_0 até k, deduzimos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_0}^{k} |x_{n+1}| &\leqslant \sum_{n=n_0}^{k} |b_n| + \sum_{n=n_0}^{k}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{n,j}|x_j| \leqslant \epsilon + \sum_{n=n_0}^{k}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{n,j} \sum_{l=1}^{n} |x_l| \\ &\leqslant \epsilon + \sum_{n=n_0}^{k}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{n,j} \left(\sum_{l=1}^{n_0} |x_l| + \sum_{l=n_0+1}^{k+1} |x_l| \right) \leqslant \epsilon + \epsilon \sum_{l=1}^{n_0} |x_l| + \epsilon \sum_{l=n_0}^{k} |x_{n+1}|.\end{aligned}$$

Isolando $\sum_{n=n_0}^{k} |x_{n+1}|$ obtemos

$$\sum_{n=n_0}^{k} |x_{n+1}| \leqslant (1-\epsilon)^{-1} \left(\epsilon + \epsilon \sum_{l=1}^{n_0} |x_l| \right).$$

Tomando o limite quando $k \to \infty$ concluímos que a série $\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|$ é convergente, o que implica na conclusão do Teorema. ■

A seguir veremos um resultado referente às matrizes $a_{n,j}$, que aparecem em (3.37), que nos possibilita definir uma função auxiliar V, adequada para a prova de que, sob determinadas hipóteses a serem especificadas no próximo Teorema, a solução da EDV (3.37) converge para 0.

Lema 3.1 *Sejam $a_{n,j} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $n \geq j$, $j \in \mathbb{N}$, e uma função $g\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$. Se para cada $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{l=0}^{\infty} |a_{l+n,n}|$ converge, então a série $\sum_{l=n-j}^{\infty} |a_{l+j,j} g(x_j)|$ é convergente, quaisquer que sejam $n, j \in \mathbb{N}$, $j \leqslant n$, fixados.*

Prova: Fixemos $n, j \in \mathbb{N}$, $j \leqslant n$. Para cada $l \in \mathbb{Z}^+$, $l \geq n-j$:

$$|a_{l+j,j} g(x_j)| \leqslant |a_{l+j,j}| \, |g(x_j)| \,. \tag{3.39}$$

Por outro lado, por hipótese

$$\sum_{l=0}^{\infty} |a_{l+j,j}| = \sum_{l=0}^{n-j-1} |a_{l+j,j}| + \sum_{l=n-j}^{\infty} |a_{l+j,j}| < \infty,$$

como j está fixado, este resultado implica que

$$\sum_{l=n-j}^{\infty} |a_{l+j,j}| \, |g(x_j)| < \infty,$$

o que, juntamente com (3.39) e o critério da comparação para séries, implica na conclusão do Lema:

$$\sum_{l=n-j}^{\infty} |a_{l+j,j} g(x_j)| < \infty.$$

■

O Lema acima nos permite provar um resultado, que determina condições sobre os coeficientes da EDV (3.37) e sobre a função g, suficientes para a convergência para 0 da solução daquela EDV.

Teorema 3.7 *Suponha que as matrizes $a_{n,j} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, dadas em (3.37), são tais que para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{l=0}^{\infty} |a_{l+n,n}| \leqslant C_1,$$

onde C_1 é uma constante, $C_1 \in (0,1)$ e que a função $g\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ satisfaz $|g(y)| \leqslant |y|$, para todo $y \in \mathbb{R}^r$. Se além disso, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$, então a solução da EDV (3.37) converge para 0.

Prova: Para provar este Teorema, vamos mostrar que a série que tem x_n como termo geral é convergente. Para tanto, nos utilizaremos da função auxiliar V definida em $\mathbb{N} \times S_r$, dada por

$$V(n, y_0, ..., y_n) = C \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=n-j}^{\infty} |a_{l+j,j} g(y_j)|, \qquad \text{onde} \qquad CC_1 < 1 < C.$$

Note que o Lema 3.1 nos garante que tal função assume valores reais. Aplicando o operador Δ a V obtemos que, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$\begin{aligned}
\Delta V &= C \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{l=n+1-j}^{\infty} |a_{l+j,j} g(x_j)| - C \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=n-j}^{\infty} |a_{l+j,j} g(x_j)| \\
&= C \sum_{l=0}^{\infty} |a_{l+n+1,n+1} g(x_{n+1})| + C \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=n+1-j}^{\infty} |a_{l+j,j} g(x_j)| - C \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=n-j}^{\infty} |a_{l+j,j} g(x_j)| .
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade $|a_{l+n+1,n+1} g(x_{n+1})| \leqslant |a_{l+n+1,n+1}||g(x_{n+1})|$, obtemos

$$\Delta V \leqslant C\,|g(x_{n+1})| \sum_{l=0}^{\infty} |a_{l+n+1,n+1}| + C \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{l=n+1-j}^{\infty} |a_{l+j,j} g(x_j)| - \sum_{l=n-j}^{\infty} |a_{l+j,j} g(x_j)| \right).$$

Agora usamos as hipóteses

$$|g(x_{n+1})| \leqslant |x_{n+1}| \qquad \text{e} \qquad \sum_{l=0}^{\infty} |a_{l+n,n}| \leqslant C_1 < 1$$

e destacamos a primeira parcela do último somatório entre parênteses, para obter

$$\begin{aligned}\Delta V &\leqslant CC_1\left|x_{n+1}\right| + C\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=n+1-j}^{\infty}\left|a_{l+j,j}g(x_j)\right| - \left|a_{n,j}g(x_j)\right| - \sum_{l=n-j+1}^{\infty}\left|a_{l+j,j}g(x_j)\right|\right)\\ &= CC_1\left|x_{n+1}\right| - C\sum_{j=1}^{n}\left|a_{n,j}g(x_j)\right|. \qquad (3.40)\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a desigualdade triangular em (3.37), concluímos que para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|x_{n+1}\right| \leqslant \left|b_n\right| + \sum_{j=1}^{n}\left|a_{n,j}g(x_j)\right|,$$

multiplicando esta inequação por C, obtemos a seguinte estimativa para a segunda parcela do membro direito de (3.40):

$$-C\sum_{j=1}^{n}\left|a_{n,j}g(x_j)\right| \leqslant C\left|b_n\right| - C\left|x_{n+1}\right|, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Usando este resultado em (3.40) obtemos

$$v_{n+1} - v_n = \Delta V \leqslant \left|x_{n+1}\right|(CC_1 - C) + C\left|b_n\right|, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fixando $m \in \mathbb{N}$, deduzimos da expressão acima, a seguinte desigualdade:

$$\sum_{n=1}^{m}(v_{n+1} - v_n) \leqslant (CC_1 - C)\sum_{n=1}^{m}\left|x_{n+1}\right| + C\sum_{n=1}^{m}\left|b_n\right|,$$

isto é

$$v_{m+1} - v_1 - C\sum_{n=1}^{m}\left|b_n\right| \leqslant (CC_1 - C)\sum_{n=1}^{m}\left|x_{n+1}\right|.$$

Dividindo ambos os membros desta desigualdade por $(CC_1 - C)$, que é negativo, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\left|x_{n+1}\right| &\leqslant (CC_1 - C)^{-1}v_{m+1} - (CC_1 - C)^{-1}v_1 - C(CC_1 - C)^{-1}\sum_{n=1}^{m}\left|b_n\right|\\ &< -(CC_1 - C)^{-1}v_1 - C(CC_1 - C)^{-1}\sum_{n=1}^{m}\left|b_n\right|. \qquad (3.41)\end{aligned}$$

A última desigualdade é consequência das desigualdades

$$(CC_1 - C)^{-1} < 0 \qquad \text{e} \qquad v_{m+1} \geq 0.$$

Como, por hipótese, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$, então, tomando o limite quando $m \to \infty$ em (3.41), chegamos a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty,$$

o que implica na conclusão do Teorema:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

■

Apresentamos a seguir um exemplo de EDV bidimensional, nas condições do Teorema anterior, cuja solução, portanto, converge para 0.

Exemplo 3.5 *A solução da seguinte EDV linear converge para zero quando n tende ao infinito:*

$$x_{n+1} = b_n + \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} x_j, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{3.42}$$

onde

$$b_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n^2} \\ \dfrac{1}{n^2} \end{pmatrix}, \quad a_{n,j} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{nj(n+1)} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{nj(n+1)} \end{pmatrix}, \quad n > j,$$

$$a_{n,n} = \frac{1}{3} I.$$

Para provar que a solução da EDV (3.42) converge para 0, usando o Teorema 3.7, começamos observando que, mantendo a notação desse Teorema, a função g é a função identidade e, portanto temos satisfeita a continuidade e a condição $|g(y)| \leqslant |y|$ para todo $y \in \mathbb{R}^2$. Além disso,

$$|b_n| = \frac{\sqrt{2}}{n^2} \qquad \therefore \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty.$$

Finalmente, vejamos que existe uma constante $C_1 \in (0,1)$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{l=0}^{\infty} |a_{l+n,n}| \leqslant C_1.$$

Para $n,\ l \in \mathbb{N}$:

$$|a_{l+n,n}| = \max_{|y|=1} |a_{l+n,n}y|, \qquad y \in \mathbb{R}^2. \tag{3.43}$$

Mas, para cada $y = [y_1, y_2]^\top \in \mathbb{R}^2$ com $|y| = 1$, cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $l \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} |a_{l+n,n}y| &= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} \dfrac{y_1}{n(l+n)(l+n+1)} \\ \dfrac{y_2}{n(l+n)(l+n+1)} \end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{n(l+n)(l+n+1)} \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{l(l+1)}. \end{aligned}$$

Portanto, voltando a (3.43), concluímos que

$$|a_{l+n,n}| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{l(l+1)}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall l \in \mathbb{N}. \tag{3.44}$$

Consequentemente, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado temos que

$$\sum_{l=0}^{\infty} |a_{l+n,n}| \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l(l+1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} < 1.$$

□

3.4 Algumas Equações com Retardo Finito

Nas seções anteriores nos dedicamos à investigação de propriedades qualitativas de soluções de EDV's associadas a uma condição inicial. Nosso principal interesse era determinar condições suficientes para a estabilidade e convergência de tais EDV's. O objetivo desta seção é exibir resultados referentes à estabilidade e estabilidade assintótica da solução nula de equações a diferenças homogêneas e escalares, associadas a mais de um condição inicial. Nesta parte do trabalho, vamos nos concentrar em equações a diferenças finitas, isto é, equações em que cada termo da solução depende de um número fixo de termos anteriores. Neste ponto convém observar que toda equação a diferenças finitas pode ser considerada uma EDV. De fato, se a equação a diferenças finitas é de ordem k, podemos considerar os termos que antecedem os k

termos anteriores ao estado atual o que a carateriza como uma Equação a Diferenças de Volterra.

Apresentamos abaixo a forma geral das equações que serão objeto de nosso estudo na presente seção:

$$\Delta x_n = -\sum_{j=0}^{\tau} a_{n,j} x_{n-j}, \qquad x_{-\tau}, \ldots, x_0 \quad \text{dados}, \tag{3.45}$$

sendo τ um inteiro positivo fixado e $x_n \in \mathbb{R}$. Note que esta é uma equação a diferenças de ordem $\tau + 1$, que tem 0 como ponto de equlíbrio, com solução de equilíbrio correspondente sendo a solução nula. Denotamos a solução da equação (3.45) por $x(n, 0, \mathbf{x}_0)$, onde o símbolo em negrito $\mathbf{x}_0$ representa a coleção das condições iniciais $x_{-\tau}, \ldots, x_0$. Quando o contexto não deixar dúvidas poderemos representar a solução da equação (3.45) simplesmente por (x_n).

A seguir definimos as noções de estabilidade e estabilidade assintótica da solução nula da equação (3.45).

Definição 3.2 *, Diz-se que a solução nula da equação (3.45) é:*

1. *estável se para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que,*

$$|x_j| < \delta, \quad \textit{para} \; -\tau \leqslant j \leqslant 0, \quad \Rightarrow \quad |x(n, 0, \boldsymbol{x}_0)| < \epsilon, \quad \forall n \geq 0;$$

2. *assintóticamente estável se é estável e se existe um conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^{\tau+1}$, contendo a origem, tal que $\lim_{n\to\infty} x(n, 0, \boldsymbol{x}_0) = 0$, qualquer que seja a condição inicial $\boldsymbol{x}_0 \in A$.*

No caso em que $A = \mathbb{R}^{\tau+1}$ na definição anterior diremos que a solução nula tem estabilidade assintótica global.

O Lema seguinte nos permitirá escrever a equação (3.45) de uma forma conveniente.

Lema 3.2 *A equação (3.45) pode ser escrita como*

$$\Delta x_n = -q_n x_n + \Delta F_n, \tag{3.46}$$

onde

$$F_n := \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{s=1}^{j} a_{n+j-s,j} x_{n-s} \qquad e \qquad q_n := \sum_{j=0}^{\tau} a_{n+j,j}. \tag{3.47}$$

Prova: Comparando as equações (3.45) e (3.46) vemos que para provar o Lema basta provar que

$$-q_n x_n + \Delta F_n = -\sum_{j=0}^{\tau} a_{n,j} x_{n-j}.$$

Aplicando o operador Δ a F_n obtemos

$$\begin{aligned} \Delta F_n &= \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{s=1}^{j} (a_{n+1+j-s,j}\, x_{n+1-s} - a_{n+j-s,j}\, x_{n-s}) \\ &= \sum_{j=1}^{\tau} (a_{n+j,j}\, x_n - a_{n,j}\, x_{n-j}), \end{aligned}$$

sendo que a última igualdade é facilmente obtida quando se nota que o somatório

$$\sum_{s=1}^{j} (a_{n+1+j-s,j} x_{n+1-s} - a_{n+j-s,j} x_{n-s})$$

representa uma soma telescópica. Usando a última igualdade e a definição de q_n, obtem-se

$$\begin{aligned} -q_n x_n + \Delta F_n &= -\sum_{j=0}^{\tau} a_{n+j,j}\, x_n + \sum_{j=1}^{\tau} a_{n+j,j}\, x_n - \sum_{j=1}^{\tau} a_{n,j}\, x_{n-j} \\ &= -a_{n,0}\, x_n - \sum_{j=1}^{\tau} a_{n,j}\, x_{n-j} \\ &= -\sum_{j=0}^{\tau} a_{n,j}\, x_{n-j}, \end{aligned}$$

o que encerra a prova do Lema. ■

Observação 3.4 *Daqui em diante sempre que escrevermos q_n e F_n estaremos nos referindo às somas definidas em (3.47), além disso usaremos a notação:*

$$\bar{q}_n := \sum_{j=0}^{\tau} |a_{n+j,j}| \,.$$

Veremos a seguir uma série de resultados obtidos por V.B. Kolmanovskii *et al.* [8], que nos fornecem, de maneira progressiva, condições sobre os coeficientes da equação (3.45), suficientes para garantir a estabilidade assintótica global da solução nula desta equação. Os dois próximos teoremas nos dão, respectivamente, condições suficientes para que a solução da equação (3.45) seja convergente e condições suficientes para que a solução convirga para 0. Por fim , o terceiro teorema determinará uma condição, adicional às dadas nos dois primeiros teoremas, que nos permitirá garantir a estabilidade da solução nula da equação (3.45).

Teorema 3.8 *Para que a solução (x_n) da EDV (3.45) seja convergente, é suficiente que*

$$\bar{q}_n \leqslant M q_n \qquad \textit{para algum} \qquad M > 0;$$

$$q_n > 0 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+;$$

$$\sup_n \left(-2 + q_n + \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{s=1}^{j} |a_{n+j-s,j}| + M \sum_{i=1}^{\tau} q_{n+i} \right) < 0. \tag{3.48}$$

Prova: Começamos mostrando que $M \geq 1$, o que será útil mais adiante. O fato de q_n ser positivo, a desigualdade triangular e a hipótese de que $\bar{q}_n \leqslant M q_n$, implicam respectivamente na primeira igualdade e nas duas desigualdades abaixo

$$q_n = |q_n| = \left| \sum_{j=0}^{\tau} a_{n+j,j} \right| \leqslant \sum_{j=0}^{\tau} |a_{n+j,j}| = \bar{q}_n \leqslant M q_n,$$

donde segue que $M \geq 1$. Para provar o Teorema, vamos nos utilizar da função auxiliar $V\colon \mathbb{Z}^+ \times S_1 \to \mathbb{R}$, satisfazendo $\underbrace{V(n, x_0, \ldots, x_n)}_{:= v_n} = \widehat{V} + \widetilde{V}$, onde $\widehat{V} = \underbrace{\widehat{V}(n, x_0, \ldots, x_n)}_{:= \widehat{v}_n} = z_n^2$, sendo

$$z_n = x_n - F_n \tag{3.49}$$

e

$$\widetilde{V} = \underbrace{\widetilde{V}(n, x_0, \ldots, x_n)}_{:= \widetilde{v}_n} = \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^{j} q_{n+j-i} \sum_{u=1}^{i} |a_{n+j-u,j}|\, x_{n-u}^2. \tag{3.50}$$

Vamos mostrar que as sequências (z_n) e (F_n) convergem, donde seguirá, por (3.49), a conclusão do Teorema. Primeiro vamos ver que (z_n) converge. Desejamos, antes de iniciar a prova desta convergência, esboçar o roteiro que nos conduzirá e este resultado. O primeiro passo é observar que $z_n^2 = v_n - \widetilde{v}_n$. Em seguida mostraremos que as sequências (v_n) e $(\widetilde{v}_n)$ são convergentes, donde seguirá, a convergência de (z_n^2), e consequentemente, a convergência $(|z_n|)$. Feito isso, mostraremos que para n suficientemente grande, todos os termos z_n possuem o mesmo sinal e, portanto, a convergência de $(|z_n|)$ implicará na convergência de (z_n)

Começamos provando que (v_n) é convergente. Como tal sequência é não-negativa, basta verificar que ela é monótona decrescente para concluir pela sua convergência. A maneira mais natural de fazer isso é aplicar o operador Δ a V, pois o resultado dessa aplicação nos permitirá obter informações sobre como os termos sucessivos dessa sequência se relacionam. A linearidade do operador Δ nos permite calcular separadamente $\Delta\widehat{V}$ e $\Delta\widetilde{V}$ e depois somar os resultados obtidos para encontrar ΔV. A aplicação de Δ a $\widehat{V}$ nos dá:

$$\Delta\widehat{V} = z_{n+1}^2 - z_n^2 = (z_{n+1} + z_n)(z_{n+1} - z_n). \tag{3.51}$$

Da definição de z_n, dada em (3.49), e da equação (3.46), concluímos que podemos escrever o segundo fator no lado direito da igualdade acima da seguinte maneira

$$z_{n+1} - z_n \;=\; x_{n+1} - F_{n+1} - x_n + F_n = \Delta x_n - \Delta F n$$

$$= \quad -q_n x_n. \tag{3.52}$$

Agora, usando este resultado conseguimos reescrever o primeiro fator do segundo membro da igualdade (3.51) como segue

$$\begin{aligned} z_{n+1} + z_n &= 2z_n + (z_{n+1} - z_n) \\ &= 2z_n - q_n x_n. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Substituindo (3.52) e (3.53) em (3.51) e usando a definição de z_n e de F_n, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta\widehat{V} &= (2z_n - q_n x_n)(-q_n x_n) = q_n(q_n x_n^2 - 2x_n^2 + 2x_n F_n) \\ &\leqslant q_n \left(q_n x_n^2 - 2x_n^2 + x_n^2 \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{s=1}^{j} |a_{n+j-s,j}| + \sum_{s=1}^{\tau} x_{n-s}^2 \sum_{j=s}^{\tau} |a_{n+j-s,j}| \right), \end{aligned}$$

isto é

$$\Delta\widehat{V} \leqslant q_n \left(-2 + q_n + \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{s=1}^{j} |a_{n+j-s,j}| \right) x_n^2 + q_n \sum_{s=1}^{\tau} x_{n-s}^2 \sum_{j=s}^{\tau} |a_{n+j-s,j}| \,.$$

Agora, aplicando o operador diferença em $\widetilde{V}$ obtemos a expressão

$$\Delta\widetilde{V} = \sum_{j=1}^{\tau} \left(\sum_{i=0}^{j-1} q_{n+j-i} \,|a_{n+j,j}|\, x_n^2 - q_n \sum_{u=1}^{j} |a_{n+j-u,j}|\, x_{n-u}^2 \right).$$

Somando as duas expressões expressoões obtidas acima, conseguimos

$$\begin{aligned} \Delta V &\leqslant q_n \left(-2 + q_n + \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{s=1}^{j} |a_{n+j-s,j}| \right) x_n^2 + q_n \sum_{s=1}^{\tau} x_{n-s}^2 \sum_{j=s}^{\tau} |a_{n+j-s,j}| + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\tau} \left(\sum_{i=0}^{j-1} q_{n+j-i} \,|a_{n+j,j}|\, x_n^2 - q_n \sum_{u=1}^{j} |a_{n+j-u,j}|\, x_{n-u}^2 \right) \\ &= q_n \left(-2 + q_n + \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{s=1}^{j} |a_{n+j-s,j}| \right) x_n^2 + x_n^2 \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=0}^{j-1} q_{n+j-i} \,|a_{n+j,j}| \end{aligned} \tag{3.54}$$

Notando que $i \leqslant j-1 \leqslant \tau-1$, usando a definição de $\bar{q}_n$ e a hipótese de que $\bar{q}_n \leqslant M q_n$, obtemos

$$\sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=0}^{j-1} q_{n+j-i} \,|a_{n+j,j}| \leqslant \sum_{j=0}^{\tau} |a_{n+j,j}| \sum_{i=0}^{\tau-1} q_{n+i+1} = \bar{q}_n \sum_{i=1}^{\tau} q_{n+i} \leqslant M q_n \sum_{i=1}^{\tau} q_{n+i}.$$

Portanto, voltando a (3.54) e usando a hipótese (3.48) obtemos, respectivamente, as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}\Delta V &\leqslant q_n x_n^2 \left(-2 + q_n + \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{s=1}^{j} |a_{n+j-s,j}| + M \sum_{i=1}^{\tau} q_{n+i} \right) \\ &\leqslant \alpha q_n x_n^2 < 0, \end{aligned} \tag{3.55}$$

onde

$$\alpha := \sup_n \left(-2 + q_n + \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{s=1}^{j} |a_{n+j-s,j}| + M \sum_{i=1}^{\tau} q_{n+i} \right).$$

Isto significa que a sequência (v_n) é decrescente. Como além disso, tal sequência é não-negativa, concluímos que ela é convergente e

$$L = \lim v_n \geq 0.$$

Devemos agora observar algo que será útil na prova da convergência de $(\widetilde{v}_n)$ e de (F_n): da convergência de (v_n) temos que (3.55) implica, pelo teorema do sanduíche, que

$$\alpha q_n x_n^2 \to 0, \qquad \therefore \qquad q_n x_n^2 \to 0. \tag{3.56}$$

Vamos provar agora que $(\widetilde{v}_n)$ é convergente, mais específicamente, vejamos que

$$\lim \widetilde{v}_n = 0. \tag{3.57}$$

Da definição de $\widetilde{V}$ dada em (3.50) deduzimos que

$$\widetilde{v}_n \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\tau} q_{n+\tau-i} \right) \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{u=1}^{\tau} |a_{n+j-u,j}|\, x_{n-u}^2. \tag{3.58}$$

Podemos reescrever o fator à direita da expressão entre parênteses acima, da seguinte forma

$$\sum_{j=1}^{\tau} \sum_{u=1}^{\tau} |a_{n+j-u,j}|\, x_{n-u}^2 = \sum_{u=1}^{\tau} x_{n-u}^2 \sum_{j=1}^{\tau} |a_{n+j-u,j}|,$$

daqui, usando a definição de $\bar{q}_n$ e a hipótese de que $\bar{q}_n \leqslant M q_n$, obtemos

$$\sum_{j=1}^{\tau} \sum_{u=1}^{\tau} |a_{n+j-u,j}|\, x_{n-u}^2 \leqslant \sum_{u=1}^{\tau} x_{n-u}^2 \sum_{j=0}^{\tau} |a_{n+j-u,j}| = \sum_{u=1}^{\tau} x_{n-u}^2 \bar{q}_{n-u} \leqslant M \sum_{u=1}^{\tau} x_{n-u}^2 q_{n-u}.$$

Voltando a (3.58) e lembrando que $\widetilde{V}$ é não-negativo, obtemos que, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$0 \leqslant \widetilde{v}_n \leqslant M \left(\sum_{j=1}^{\tau} q_{n+\tau-j} \right) \sum_{u=1}^{\tau} x_{n-u}^2 q_{n-u}$$

e como, por (3.56)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{u=1}^{\tau} x_{n-u}^2 q_{n-u} = 0$$

então, para mostrar que $\widetilde{v}_n \to 0$, resta mostrar que a sequência $\left(\sum_{j=1}^{\tau} q_{n+\tau-j} \right)$ é limitada. As hipóteses de que $\alpha < 0$, de que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, $q_n > 0$ e o fato de que $M \geq 1$ implicam que, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$\begin{aligned} 2 \quad &> \quad q_n + \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{s=1}^{j} |a_{n+j-s,j}| + M \sum_{i=1}^{\tau} q_{n+i} \geq q_n + \sum_{i=1}^{\tau} q_{n+i} \\ &= \quad q_n + \sum_{i=0}^{\tau} q_{n+i} - q_n > \sum_{i=0}^{\tau-1} q_{n+i} = \sum_{j=1}^{\tau} q_{n+\tau-j} > 0, \end{aligned}$$

isto é

$$0 < \sum_{j=1}^{\tau} q_{n+\tau-j} < 2. \tag{3.59}$$

donde segue o limite (3.57). Das convergências $v_n \to L$ e $\widetilde{v}_n \to 0$, e da igualdade $z_n^2 = v_n - \widetilde{v}_n$, segue que, $z_n^2 \to L$, e então

$$|z_n| \to \sqrt{L}. \tag{3.60}$$

Provemos que a sequência (z_n) converge. Com efeito, já sabemos que $L \geq 0$. Caso $L = 0$, temos que $z_n \to 0$. Suponhamos agora que $L > 0$. Sobre a sequência (z_n) há duas possibilidades que se excluem:

1. Existe m tal que z_n não muda de sinal para $n \geq m$;

2. Não existe tal m.

Suponhamos que vale a segunda posibilidade. Seja $\epsilon \in \mathbb{R}$, $0 < \epsilon < \sqrt{L}$. Como $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \sqrt{L}$, então, existe $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, tal que

$$n > n_0 \Rightarrow 0 < \sqrt{L} - \epsilon < |z_n| < \sqrt{L} + \epsilon. \tag{3.61}$$

Definimos agora os seguintes conjuntos de índices:

$$I = \{n > n_0; z_n > 0\} \qquad \text{e} \qquad J = \{n > n_0; z_n < 0\}.$$

Como estamos supondo que a sequência (z_n) alterna de sinal infinitamente, então I e J são ilimitados superiormente. Podemos então considerar uma sequência de índices (s_n) tal que $s_n \in I$, $s_n + 1 \in J$, com $s_n \to \infty$ Seja a subsequência (z_{s_n}) de (z_n). Como $s_n > n_0$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, então, de (3.61) vem que, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$\sqrt{L} - \epsilon < z_{s_n} < \sqrt{L} + \epsilon \qquad \text{e} \qquad \sqrt{L} - \epsilon < -z_{s_n+1} < \sqrt{L} + \epsilon.$$

Somando os membros correspondentes e usando a expressão obtida em (3.52), obtemos

$$0 < 2(\sqrt{L} - \epsilon) < q_{s_n} x_{s_n} < 2(\sqrt{L} + \epsilon), \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+,$$

em particular

$$0 < 2(\sqrt{L} - \epsilon) < q_{s_n} x_{s_n}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+. \tag{3.62}$$

Por outro lado, ainda sob a suposição 2., vamos mostrar algo que está em contradição com (3.62), donde poderemos concluir que vale o caso 1., ou seja, existe m tal que z_n não muda de sinal para $n \geq m$. A expressão a que chegaremos, e que contradiz (3.62), é a seguinte consequência de (3.56):

$$\lim_{n\to\infty} q_n x_n = 0. \tag{3.63}$$

De fato,

$$|q_n x_n| = \sqrt{q_n^2 x_n^2} = \sqrt{q_n}\sqrt{q_n x_n^2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{q_n x_n^2} = 0,$$

logo, para obter a igualdade proposta em (3.63), somente resta mostrar que $\left(\sqrt{q_n}\right)$ é uma sequência limitada. Isto segue da expressão obtida em (3.59):

$$0 < q_n \leqslant \sum_{j=1}^{\tau} q_{n+\tau-j} < 2, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \qquad \therefore \qquad 0 < \sqrt{q_n} < \sqrt{2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Seja então m tal que z_n não muda de sinal para $n \geq m$. Assim, de (3.60), vem que

$$z_n > 0 \text{ para } n \geq m \;\Rightarrow\; z_n \to \sqrt{L} \qquad \text{e} \qquad z_n < 0 \text{ para } n \geq m \;\Rightarrow\; z_n \to -\sqrt{L}.$$

De qualquer forma concluímos que a sequência (z_n) é convergente. Daqui e da definição de z_n dada em (3.49) vemos que para chegar à conclusão do Teorema, isto é, para mostrar que (x_n) converge, resta mostrar que a sequência (F_n) é convergente. Vimos acima que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n x_n = 0$, o que implica que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{\tau} |x_{n-s}| q_{n-s} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |F_n| &= \left| \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{s=1}^{j} a_{n+j-s,j} x_{n-s} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{s=1}^{j} |a_{n+j-s,j}| \, |x_{n-s}| = \sum_{s=1}^{\tau} |x_{n-s}| \sum_{j=s}^{\tau} |a_{n+j-s,j}| \\ &\leqslant \sum_{s=1}^{\tau} |x_{n-s}| \sum_{j=0}^{\tau} |a_{n+j-s,j}| = \sum_{s=1}^{\tau} |x_{n-s}| \, \bar{q}_{n-s} \leqslant M \sum_{s=1}^{\tau} |x_{n-s}| \, q_{n-s} \to 0, \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Portanto, $F_n \to 0$, e o Teorema está provado. ■

Veremos agora que se além das hipóteses dadas no Teorema anterior, a série cujo termos geral é q_n divergir, então a solução da equação (3.45) convergirá para 0.

Teorema 3.9 *Se além das hipóteses do Teorema 3.8 for válido que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n = \infty,$$

então, a solução (x_n) da EDV (3.45) converge para zero quando $n \to \infty$.

Prova: Já sabemos, pelo Teorema anterior, que se (x_n) é a solução da EDV (3.45), então existe $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Suponhamos, por redução ao absurdo, que $L > 0$. Seja $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n > \frac{L}{2}.$$

Da equação (3.46) na página 57, obtemos que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$\Delta(x_n - F_n) = -q_n x_n.$$

Daqui, somando de n_0 até r fixado, usando a implicação acima e a hipótese do Teorema, concluímos que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$\sum_{n=n_0}^{r} \Delta(x_n - F_n) = -\sum_{n=n_0}^{r} q_n x_n < -\frac{L}{2} \sum_{n=n_0}^{r} q_n \to -\infty,$$

quando $r \to \infty$, isto é

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \Delta(x_n - F_n) = -\infty. \tag{3.64}$$

Por outro lado, se $r > n_0$ então,

$$\sum_{n=n_0}^{r} \Delta(x_n - F_n) = \sum_{n=n_0}^{r} (x_{n+1} - x_n) - \sum_{n=n_0}^{r} (F_{n+1} - F_n) = x_{r+1} - x_{n_0} - F_{r+1} + F_{n_0},$$

portanto, tomando o limite quando $r \to \infty$, e lembrando que vimos na prova do Teorema anterior que $F_r \to 0$ quando $r \to \infty$, obtemos

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \Delta(x_n - F_n) = L - x_{n_0} + F_{n_0}$$

o que contradiz (3.64), logo, $L \not> 0$. De modo análogo, mostra-se que $L \not< 0$, donde segue o resultado desejado. ∎

O teorema acima nos dá condições sobre os coeficientes da equação (3.45) que garantem que sua solução converge para 0, quaisquer que sejam as condições iniciaias tomadas. Com isso, para garantir a estabilidade assintótica global da solução nula daquela equação, precisamos apenas assegurar a estabilidade de sua solução nula.

Teorema 3.10 *Se acrescentarmos às hipóteses do Teorema (3.9) que*

$$\sup_n \left(\sum_{j=1}^{\tau} \sum_{s=1}^{j} |a_{n+j-s,j}| \right) < 1,$$

então a solução nula da EDV (3.45) tem estabilidade assintótica global.

Prova: Basta provar que a solução nula de (3.45) é estável, pois já vimos no teorema anterior que, se (x_n) é solução de (3.45), então, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Fixemos $\epsilon > 0$. Vamos mostrar que existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que

$$|x_j| < \delta, \text{ para } -\tau \leqslant j \leqslant 0 \;\Rightarrow\; |x_n| < \epsilon, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Vimos na prova do Teorema 3.8 que a sequência (v_n) é decrescente, portanto, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, temos que $v_n < v_0$. Mas

$$\begin{aligned} v_n < v_0 \;&\Rightarrow\; \widehat{v}_n + \widetilde{v}_n < v_0 \Rightarrow \widehat{v}_n < v_0 \Rightarrow |x_n - F_n| < \sqrt{v_0} \Rightarrow |x_n| - |F_n| < \sqrt{v_0} \\ &\Rightarrow\; |x_n| < \sqrt{v_0} + |F_n|, \end{aligned} \tag{3.65}$$

sendo que a primeira implicação acima foi obtida da definição de v_n, dada na demonstração do Teorema 3.8, a segunda do fato de que $\widetilde{v}_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, a terceira implicação foi obtida extraido a raiz quadrada nos dois membros da desigualdade obtida, a quarta do fato de que $|a| - |b| \leqslant |a - b|$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$. Por outro lado, usando a definição de F_n, dada em (3.47), temos que para cada $N \in \mathbb{Z}^+$ fixado, se $n < N$ então

$$\begin{aligned} |F_n| &= \left|\sum_{j=1}^{\tau}\sum_{s=1}^{j} a_{n+j-s,j}x_{n-s}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{\tau}\sum_{s=1}^{j} |a_{n+j-s,j}||x_{n-s}| = \sum_{s=1}^{\tau}|x_{n-s}|\sum_{j=s}^{\tau}|a_{n+j-s,j}| \\ &= |x_{n-1}|\sum_{j=1}^{\tau}|a_{n+j-1,j}| + |x_{n-2}|\sum_{j=2}^{\tau}|a_{n+j-2,j}| + \cdots + |x_{n-\tau}|\sum_{j=\tau}^{\tau}|a_{n+j-\tau,j}| \\ &\leqslant \max_{n<N}|x_n|\left(\sum_{j=1}^{\tau}|a_{n+j-1,j}| + \sum_{j=2}^{\tau}|a_{n+j-2,j}| + \cdots + \sum_{j=\tau}^{\tau}|a_{n+j-\tau,j}|\right) \\ &= \max_{n<N}|x_n|\sum_{s=1}^{\tau}\sum_{j=s}^{\tau}|a_{n+j-s,j}| = \max_{n<n_0}|x_n|\sum_{j=1}^{\tau}\sum_{s=1}^{j}|a_{n+j-s,j}| \\ &\leqslant \max_{n<N}|x_n|\sup_n\left(\sum_{j=1}^{\tau}\sum_{s=1}^{j}|a_{n+j-s,j}|\right). \end{aligned}$$

Denotemos

$$\lambda := \sup_n\left(\sum_{j=1}^{\tau}\sum_{s=1}^{j}|a_{n+j-s,j}|\right),$$

para reescrever a última desigualdade mais simplesmente:

$$|F_n| \leqslant \lambda \max_{n<N} |x_n| \,.$$

Usando esta desigualdade em (3.65), concluímos que, para cada $n < N$:

$$|x_n| < \sqrt{v_0} + \lambda \max_{n<N} |x_n| \,,$$

e portanto

$$\max_{n<N} |x_n| < \sqrt{v_0} + \lambda \max_{n<N} |x_n| \,,$$

daqui, isolando $\max\limits_{n<N} |x_n|$, temos que

$$\max_{n<N} |x_n| < \frac{\sqrt{v_0}}{1-\lambda}.$$

Note que foi usada a hipótese do Teorema para obter a desigualdade acima. Como na desigualdade acima, $N \in \mathbb{Z}^+$ é arbitrário e $\dfrac{\sqrt{v_0}}{1-\lambda}$ não depende de N, concluiímos que

$$|x_n| < \frac{\sqrt{v_0}}{1-\lambda}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+. \tag{3.66}$$

Além disso, da definição de V segue que existe $C > 0$ tal que para quaisquer condições iniciais $x_{-\tau} \dots x_0$, têm-se:

$$\frac{\sqrt{v_0}}{1-\lambda} < C \max_{-\tau \leqslant n \leqslant 0} |x_n| \,.$$

Combinando esta desigualdade com a desigualdade (3.66), obtemos que

$$|x_n| < C \max_{-\tau \leqslant j \leqslant 0} |x_j| \,, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+. \tag{3.67}$$

Tomando $\delta = \dfrac{\epsilon}{C}$ e $|x_j| < \delta$ para $-\tau \leqslant j \leqslant 0$ obtemos $C \max\limits_{-\tau \leqslant n \leqslant 0} |x_n| < C\delta = \epsilon$. Daí, levando em conta (3.67), concluímos a prova do Teorema:

$$|x_j| < \delta \text{ para } -\tau \leqslant j \leqslant 0 \Rightarrow |x_n| < \epsilon, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

■

Na sequência veremos um caso particular de equação da forma (3.45), que cumpre todas as condições dadas nos três últimos teoremas. Consequentemente poderemos assegurar que a solução nula de tal equação tem estabilidade assintótica global.

Exemplo 3.6 *Se em (3.45) definimos a sequência* $(a_{n,j})$ *pondo*

$$a_{n,j} = \begin{cases} (3\tau^2 + 3\tau)^{-1}(n+1)^{-j} & se\ j \neq 0 \\ 0 & se\ j = 0 \end{cases}$$

então a solução nula da EDV (3.45) tem estabilidade assintótica global.

Para provar isto, vamos mostrar que são cumpridas todas as hipóteses do Teorema anterior. Primeiramente notamos que a sequência $(a_{n,j})$ é decrescente a respeito de $n \in \mathbb{N}$ e de $j \in \mathbb{N}$. Isso justificará algumas desiguladades que aparecerão mais à frente. Da definição de $a_{n,j}$ segue facilmente que $\bar{q}_n = q_n$. Vejamos agora que no caso presente vale a desigualdade:

$$\sup_n \left(q_n + \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{s=1}^{j} |a_{n+j-s,j}| + M \sum_{i=1}^{\tau} q_{n+i} \right) < 2.$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ vale o seguinte:

$$q_n + \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{s=1}^{j} |a_{n+j-s,j}| + M \sum_{i=1}^{\tau} q_{n+i} = \sum_{j=0}^{\tau} a_{n+j,j} + \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{s=1}^{j} a_{n+j-s,j} + \sum_{i=1}^{\tau} \sum_{j=0}^{\tau} a_{n+i+j,j}$$
$$= \sum_{j=1}^{\tau} a_{n+j,j} + \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{s=1}^{j} a_{n+j-s,j} + \sum_{i=1}^{\tau} \sum_{j=1}^{\tau} a_{n+i+j,j}.$$

Desta igualdade, da monotonicidade de $(a_{n,j})$ e da definição desta sequência obtemos que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$\begin{aligned} q_n + \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{s=1}^{j} |a_{n+j-s,j}| + M \sum_{i=1}^{\tau} q_{n+i} &< \tau a_{n,1} + \frac{\tau(\tau+1)}{2} a_{n,1} + \tau^2 a_{n,1} \\ &= \frac{3\tau^2 + 3\tau}{2} \frac{1}{3\tau^2 + 3\tau} \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

o que implica na seguinte desigualdade

$$q_n + \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{s=1}^{j} |a_{n+j-s,j}| + M \sum_{i=1}^{\tau} q_{n+i} \leqslant \frac{1}{2}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Assim sendo,

$$\sup_n \left(q_n + \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{s=1}^{j} |a_{n+j-s,j}| + M \sum_{i=1}^{\tau} q_{n+i} \right) \leqslant \frac{1}{2} < 2.$$

Dos resultados obtidos acima temos assegurado que a solução é convergente. A seguir veremos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n = \infty, \tag{3.68}$$

para concluir que a solução converge para 0. Da definição de $(a_{n,j})$ obtemos que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{j=1}^{\tau} a_{n+j,j} = \frac{1}{3\tau^2+3\tau}\left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+\tau+1)^\tau}\right) \\ &\geq \frac{1}{3\tau^2+3\tau}\frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

e então, do princípio da comparação segue (3.68). Para concluir que a solução nula tem estabilidade assintótica global, resta mostrar que neste caso vale a desigualdade dada no Teorema 3.10:

$$\sup_n \sum_{j=1}^{\tau}\sum_{s=1}^{j} |a_{n+j-s,j}| < 1.$$

Da definição e da monotonicidade de $(a_{n,j})$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\tau}\sum_{s=1}^{j} |a_{n+j-s,j}| &= \sum_{j=1}^{\tau}\sum_{s=1}^{j} a_{n+j-s,j} < \frac{\tau(1+\tau)}{2} a_{n,1}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \\ &= \frac{\tau+\tau^2}{2}\frac{1}{3\tau^2+3\tau}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{6(n+1)}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \\ &\leqslant \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\sup_n \sum_{j=1}^{\tau}\sum_{s=1}^{j} |a_{n+j-s,j}| \leqslant \frac{1}{6} < 1.$$

□

Capítulo 4

Limitação

Algumas das mais importantes informações que se pode desejar obter a respeito da solução de uma EDV, dizem respeito à sua limitação. Em algumas situações pode ser de fundamental importância saber se a solução de uma EDV é limitada ou não. Por exemplo, conforme detalhado por M. R. Crisci *et al.* em [5], o erro entre a solução exata e a solução numérica de algumas equações integrais de Volterra pode satisfazer uma EDV, portanto, se tivermos assegurado que a solução dessa EDV é limitada teremos garantido a limitação do erro global, isto é, a estabilidade do método numérico utilizado. O objetivo deste capítulo é apresentar resultados referentes à limitação da solução de algumas EDV's que apresentam a forma geral dada em (1.5), que repetimos aqui:

$$x_{n+1} = H(n, x_{n_0}, \ldots, x_n), \quad n \geq n_0, \quad x_{n_0} \text{ dado.} \tag{4.1}$$

Neste trabalho vamos utilizar as definições de limitação e limitação uniforme para o sistema (4.1) adotadas em [5].

Definição 4.1 *Diz-se que o sistema (4.1) é*

1. *Limitado quando, dados um momento inicial* n_0 *e uma constante* $r > 0$*, existe* $\alpha = \alpha(n_0, r) > 0$ *que depende de* n_0 *e* r*, tal que,* $|x_{n_0}| < r \Rightarrow |x(n, n_0, x_{n_0})| < \alpha, \quad \forall n \geq n_0$*;*

2. *Uniformemente limitado a respeito de n_0, quando α na definição anterior não depende do momento inicial n_0.*

Vejamos agora, através de um exemplo, que um sistema limitado não necessariamente é uniformemente limitado.

Exemplo 4.1 *Mostraremos que o sistema bidimensional abaixo é limitado, porém, não é uniformemente limitado.*

$$x_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)^2(n+3)^{-1} \\ 0 & (n+2)^3(n+3)^{-3} \end{pmatrix} x_n + \begin{pmatrix} 0 & (n+1)^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x_{n_0}, \quad x_{n_0} = (x_{01}, x_{02})^\top \ \textit{dado.}$$

Conforme vimos no Capítulo 2, a solução deste sistema é dada pela seguinte expressão

$$x_n = R_{n,n_0} x_{n_0} + \sum_{l=n_0}^{n} R_{n,l} b_{l-1}, \qquad n > n_0, \tag{4.2}$$

onde

$$R_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & (j+2)^3(i+1)(i+2)^{-1} - (j+1)(j+2)^2 \\ 0 & (j+2)^3(i+2)^{-3} \end{pmatrix}, \quad i \geq j$$

pode ser obtida recursivamente da fórmula (2.5) dada no capítulo 1, e

$$b_i = \begin{pmatrix} 0 & (i+1)^{-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x_{n_0}.$$

De (4.2) segue que, para cada $n > n_0$:

$$|x_n| \leqslant |R_{n,n_0}||x_{n_0}| + \sum_{l=n_0}^{n} |R_{n,l} b_{l-1}|. \tag{4.3}$$

Da definição de $R_{i,j}$ dada acima, obtemos que, para cada l satisfazendo $n_0 \leqslant l \leqslant n$:

$$R_{n,l} b_{l-1} = \begin{pmatrix} 1 & (l+2)^3(n+1)(n+2)^{-1} - (l+1)(l+2)^2 \\ 0 & (l+2)^3(n+2)^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & l^{-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix},$$

fazendo as contas obtemos

$$R_{n,l} b_{l-1} = \begin{pmatrix} l^{-2} x_{02} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a última parcela do segundo membro da expressão obtida em (4.3) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\sum_{l=n_0}^{n} |R_{n,l}b_{l-1}| = |x_{02}| \sum_{l=n_0}^{n} \left| \begin{pmatrix} l^{-2} \\ 0 \end{pmatrix} \right| = |x_{02}| \sum_{l=n_0}^{n} l^{-2},$$

e então

$$\sum_{l=n_0}^{n} |R_{n,l}b_{l-1}| \leqslant |x_{02}| \sum_{l=1}^{\infty} l^{-2} = |x_{02}| \frac{\pi^2}{6}.$$

Então, voltando a (4.3) obtemos,

$$|x_n| \leqslant |R_{n,n_0}||x_{n_0}| + |x_{02}| \frac{\pi^2}{6}, \qquad \forall n > n_0, \tag{4.4}$$

Considerando a norma do máximo, concluímos que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$\begin{aligned} &\|R_{n,n_0}\|_\infty \\ &= \max\{1, |(n_0+2)^3(n+1)(n+2)^{-1} - (n_0+1)(n_0+2)^2|, |(n_0+2)^3(n+2)^{-3}|\} \\ &\leqslant \max\{1, |(n_0+2)^3| + |(n_0+1)(n_0+2)^2|, |(n_0+2)^3| := M(n_0). \end{aligned}$$

Como todas as normas em $\mathbb{R}^{2\times 2}$ são equivalentes, a desigualdade acima implica que existe $C(n_0) > 0$, tal que $|R_{n,n_0}| \leqslant C(n_0)$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Daqui e da desigualdade obtida em (4.4) concluímos que o sistema dado é limitado.

Por outro lado, fazendo $i = kn_0$, $k \in N_2$ e $j = n_0$, na expressão que define $R_{i,j}$, concluímos que o elemento $r_{1,2}$ da primeira linha e segunda coluna de R_{kn_0,n_0} é

$$\begin{aligned} r_{kn_0,n_0} &= (n_0+2)^3(kn_0+1)(kn_0+2)^{-1} - (n_0+1)(n_0+2)^2 \\ &= \frac{(n_0+2)^2}{kn_0+2}[(n_0+2)(kn_0+1) - (n_0+1)(kn_0+2)] \\ &= \frac{(n_0+2)^2}{kn_0+2}(kn_0 - n_0) \\ &= \frac{n_0(n_0+2)^2(k-1)}{kn_0+2} \to \infty \end{aligned}$$

quando $n_0 \to \infty$. Consequentemente

$$|R_{kn_0,n_0}| \to \infty \quad \text{quando} \quad n_0 \to \infty.$$

Daqui concluímos que o sistema (4.2) não é uniformemente limitado. □

4.1 Limitação Via Método de Lyapunov

Nesta seção vamos voltar a utilizar as funções de Lyapunov, que tão útil se mostraram para o estudo de estabilidade no capítulo anterior. O procedimento utilizado para investigar condições para limitação de soluções de EDV's, será semelhante ao desenvolvido no capítulo precedente para o estudo de estabilidade. As funções V que utilizaremos nesta parte do trabalho satisfazem

$$V(n, y_{n_0}, \ldots, y_n, \ldots) = V(n, y_{n_0}, \ldots, y_n), \qquad \forall y_n \in \mathbb{R}^r, \quad n \geq n_0.$$

Teorema 4.1 *Para que o sistema (4.1) seja limitado, é suficiente que existam uma função V e uma K-função ω, tais que*

$$V(n, x_{n_0}, \ldots, x_n) \geq \omega(|x_n|), \qquad \forall x_n \in \mathbb{R}^r, \quad n \geq n_0; \tag{4.5}$$

$$\Delta V(n, x_{n_0}, \ldots, x_n) \leqslant 0, \quad \textit{para todo } x_n \textit{ solução de } (4.1); \tag{4.6}$$

$$\lim_{y \to \infty} \omega(y) = \infty;$$

$V(n_0, \cdot)$ é uma função que leva conjuntos limitados $A \subset \mathbb{R}^r$ em

conjuntos limitados de $\mathbb{R}$. (4.7)

Prova: Sejam $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ e uma condição inicial x_{n_0} satisfazendo $|x_{n_0}| < r$. Devemos mostrar que existe $\alpha > 0$ dependendo de n_0, e de r, tal que

$$|x_n| < \alpha, \qquad \forall n \geq n_0, \tag{4.8}$$

onde estamos denotando $x_n = x(n, n_0, x_{n_0})$. Das hipóteses (4.5) e (4.6) deduzimos que

$$\omega(|x_n|) \leqslant V(n_0, x_{n_0}), \qquad \forall n \geq n_0.$$

Por outro lado, do fato de $\omega(y) \to \infty$ quando $y \to \infty$ e da hipótese (4.7), segue que existe $\alpha = \alpha(n_0, r) > 0$, grande o suficiente para que

$$V(n_0, x_{n_0}) < \omega(\alpha).$$

Das duas últimas desigualdades e da monotonicidade de ω obtemos a expressão dada em (4.8), encerrando a prova do Teorema. ■

Note que as hipóteses do teorema anterior garantem somente a limitação do sistema (4.1). O próximo teorema mostra que se uma determinada condição adicional for cumprida, então aquele sistema será uniformemente limitado.

Teorema 4.2 *Se além das condições (4.5)–(4.6) do Teorema anterior existir uma K-função ω_1 satisfazendo $V(n_0, x_{n_0}) \leqslant \omega_1(|x_{n_0}|)$, então o sistema (4.1) é uniformemente limitado.*

Prova: Sejam $r > 0$ e $x_{n_0} \in \mathbb{R}^r$ satisfazendo

$$|x_{n_0}| < r. \tag{4.9}$$

Devemos mostrar que existe $\alpha = \alpha(r) > 0$, tal que

$$|x_n| < \alpha, \qquad \forall n \geq n_0, \tag{4.10}$$

onde $x_n := x(n, n_0, x_{n_0})$. Como ω_1 é não-decrescente, então de (4.9) obtemos a seguinte desigualdade

$$\omega_1 |x_{n_0}| \leqslant \omega_1(r).$$

Por outro lado, a hipótese de que $\lim_{y\to\infty} \omega(y) = \infty$, assegura a existência de $\alpha = \alpha(r) > 0$, tal que

$$\omega(\alpha) > \omega_1(r).$$

Usando as hipóteses (4.5)–(4.6), a hipótese deste Teorema e as duas últimas desigualdades, consegue-se

$$\omega(|x_n|) \leqslant V(n, x_{n_0}, ..., x_n) \leqslant V(n_0, x_{n_0}) \leqslant \omega_1(|x_{n_0}|) \leqslant \omega_1(r) < \omega(\alpha), \qquad \forall n \geq n_0.$$

Daqui, e do fato de ω ser não-decrescente, segue a expressão (4.10) como queríamos demostrar. ■

O resultado seguinte mostra que o Teorema anterior nos permite obter informações sobre limitação de um sistema como (4.1), a partir da análise dos coeficientes da equação do sistema. Para provar este resultado usaremos uma função de Lyapunov V, tal que $V(n,\cdot)$ não depende de x_j para $j \neq n$.

Corolário 4.1 *Se* (a_n) *e* (b_n) *são duas sequências de números reais tais que*

$$|a_n| + |b_n| \leqslant 1, \qquad \forall n \geq 0. \tag{4.11}$$

então o sistema escalar

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n x_n \left(1 + \sum_{j=0}^{n-1} x_j^2\right)^{-1}, \quad n \geq 0, \tag{4.12}$$

é uniformemente limitado.

Convenção: Para $n = 0$ *o somatório acima será considerado nulo.*

Prova: Vamos mostrar que são cumpridas as hipóteses do Teorema anterior. Seja $V\colon \mathbb{Z}^+ \times S_1 \to \mathbb{R}$, dado por

$$V(n, x_0, ..., x_n,) = |x_n|\,.$$

Desta definição é imediato que a hipótese (4.7) é satisfeita. Aplicando o operador Δ a V, obtemos

$$\Delta V = V(n+1, x_0, ..., x_{n+1}) - V(n, x_0, ..., x_n) = |x_{n+1}| - |x_n|\,. \tag{4.13}$$

Usamos a desigualdade triangular em (4.12) e o fato da expressão entre parênteses em (4.12) ser igual ou menor do que 1, para obter a seguinte desigualdade

$$|x_{n+1}| \leqslant |a_n|\,|x_n| + |b_n|\,|x_n|\,,$$

que juntamente com (4.13) e a hipótese (4.11) implica em

$$\Delta V \leqslant (|a_n| + |b_n| - 1)\,|x_n| \leqslant 0,$$

isto é, V não-crescente ao longo da solução de (4.12). Considerando a função ψ definida para todo $x \in \mathbb{R}^+$, por $\psi(x) = x$, vê-se claramente que ψ é uma K-função e $\lim_{y\to\infty} \psi(y) = \infty$. Além disso,

$$\psi(|x_n|) = |x_n| = V(n, x_0, ..., x_n), \qquad \forall n \geq n_0,$$

e portanto concluímos que o sistema bidimensional (4.12) é uniformemente limitado.

■

Desejamos mostrar agora que se as hipótese do Teorema anterior são enfraquecidas para uma classe especial de EDV's ainda garantimos a limitação de suas soluções.

Teorema 4.3 *Para que a solução da EDV dada em (4.1) seja limitada é suficiente que existam duas sequências* $(a_{n,j})$, $0 \leqslant j \leqslant n$, *e* (b_n) *de números reais não-negativos tais que*

$$|H(n, x_{n_0}, ..., x_n)| \leqslant \sum_{j=1}^{n-n_0} a_{n,j}|x_{n-j}| + b_n, \qquad \forall n \geq n_0, \tag{4.14}$$

onde

$$\sup_{n\geq n_0} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+j,j} < 1 \qquad e \qquad \sum_{j=n_0}^{\infty} b_j < \infty.; \tag{4.15}$$

Prova: Suponhamos, por redução ao absurdo, que a solução da EDV dada em (4.1) é ilimitada. Para chegar a uma contradição vamos nos valer da função auxiliar $V\colon N_0 \times S_r \to \mathbb{R}$ dada por

$$V(n, y_{n_0}, ..., y_n) = |y_n| + \sum_{l=1}^{n-n_0} |y_{n-l}| \sum_{j=l}^{\infty} a_{n+j-l,j}. \tag{4.16}$$

De nossa suposição segue que a sequência (v_n) dada por

$$v_n = V(n, x_{n_0}, \ldots, x_n)$$

é ilimitada superiormente. Consequentemente, existe uma sequência de índices (τ_n) com $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$, tal que, para cada j, $n_0 \leqslant j \leqslant \tau_n$:

$$v_j \leqslant v_{\tau_n}.$$

Assim, sendo τ um termo arbitrário e fixo da sequência (τ_n) temos que, $v_{\tau-1} \leqslant v_\tau$. Com o objetivo de descobrir que informações podemos extrair desta desigualdade, vamos ver como se relacionam os termos sucessivos da sequência (v_n). Para isso aplicamos o operador Δ a V ao longo da solução:

$$\Delta V = |x_{n+1}| - |x_n| + \sum_{l=1}^{n+1-n_0} |x_{n+1-l}| \sum_{j=l}^{\infty} a_{n+1+j-l,j} - \sum_{l=1}^{n-n_0} |x_{n-l}| \sum_{j=l}^{\infty} a_{n+j-l,j}, \quad (4.17)$$

para todo $n \geq n_0$. Vamos trabalhar com os somatórios acima para obter uma expressão mais simples para ΔV. Para cada $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n+1-n_0} |x_{n+1-l}| \sum_{j=l}^{\infty} a_{n+1+j-l,j} - \sum_{l=1}^{n-n_0} |x_{n-l}| \sum_{j=l}^{\infty} a_{n+j-l,j} \\
&= |x_n| \sum_{j=1}^{\infty} a_{n+j,j} + |x_{n-1}| \sum_{j=2}^{\infty} a_{n+j-1,j} + \cdots + |x_{n_0}| \sum_{j=n+1-n_0}^{\infty} a_{n_0+j,j} \\
&-|x_{n-1}| \sum_{j=1}^{\infty} a_{n+j-1,j} - \cdots - |x_{n_0}| \sum_{j=n-n_0}^{\infty} a_{n_0+j,j} \\
&= |x_n| \sum_{j=1}^{\infty} a_{n+j,j} - |x_{n-1}| a_{n,1} - |x_{n-2}| a_{n,2} - \cdots - |x_{n_0}| a_{n,n-n_0} \\
&= |x_n| \sum_{j=1}^{\infty} a_{n+j,j} - \sum_{j=1}^{n-n_0} |x_{n-j}| a_{n,j}.
\end{aligned}$$

Então, voltando a (4.17), obtemos que, para cada $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned}
\Delta V &= |x_{n+1}| - |x_n| + |x_n| \sum_{j=1}^{\infty} a_{n+j,j} - \sum_{j=1}^{n-n_0} |x_{n-j}| a_{n,j} \\
&\leqslant |x_{n+1}| - |x_n| + |x_n| \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+j,j} - \sum_{j=1}^{n-n_0} |x_{n-j}| a_{n,j} \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Observe que pelo fato de x_n ser solução de (4.1) e pela hipótese (4.14), temos que

$$|x_{n+1}| - \sum_{j=1}^{n-n_0} |x_{n-j}| a_{n,j} \leqslant b_n, \qquad \forall n \geq n_0.$$

Substituindo este resultado em (4.18), obtemos

$$\Delta V \leqslant b_n - |x_n| + |x_n| \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+j,j},$$

ou seja

$$v_{n+1} - v_n \leqslant b_n - a|x_n|, \tag{4.19}$$

onde

$$a := 1 - \sup_n \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+j,j},$$

Daqui e de (4.19), obtemos

$$0 \leqslant v_\tau - v_{\tau-1} \leqslant b_{\tau-1} - a|x_{\tau-1}|, \tag{4.20}$$

donde deduzimos que

$$|x_{\tau-1}| \leqslant \frac{1}{a} b_{\tau-1}. \tag{4.21}$$

De (4.20) também concluímos, pelo fato de a ser positivo, que

$$v_\tau - v_{\tau-1} \leqslant b_{\tau-1} \qquad \therefore \qquad v_\tau \leqslant v_{\tau-1} + b_{\tau-1}.$$

Substituindo $v_{\tau-1}$, na desigualdade anterior, pela expressão correspondente obtida da definição de V dada em (4.16), e usando (4.21), obtemos, respectivamente, as duas seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} v_\tau &\leqslant |x_{\tau-1}| + \sum_{l=1}^{\tau-1-n_0} |x_{\tau-1-l}| \sum_{j=l}^{\infty} a_{\tau-1+j-l,j} + b_{\tau-1} \\ &\leqslant \left(\frac{1}{a} + 1\right) b_{\tau-1} + \underbrace{\sum_{l=0}^{\tau-1-n_0} |x_{\tau-1-l}| \sum_{j=l}^{\infty} a_{\tau-1+j-l,j}}_{:= \alpha}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Manipulando o duplo somatório que aparece na última desigualdade consegue-se

$$\begin{aligned} \alpha &= |x_{\tau-1}| \sum_{j=0}^{\infty} a_{\tau-1+j,j} + \cdots + |x_{n_0}| \sum_{j=\tau-1-n_0}^{\infty} a_{n_0+j,j} \\ &\leqslant |x_{\tau-1}| \sum_{j=0}^{\infty} a_{\tau-1+j,j} + |x_{\tau-2}| \sum_{j=0}^{\infty} a_{\tau-2+j,j} + \cdots + |x_{n_0}| \sum_{j=0}^{\infty} a_{n_0+j,j} \\ &\leqslant |x_{\tau-1}|(1-a) + |x_{\tau-2}|(1-a) + \cdots + |x_{n_0}|(1-a) \\ &= (1-a) \sum_{l=0}^{\tau-1-n_0} |x_{\tau-1-l}| = (1-a) \sum_{n=n_0}^{\tau-1} |x_n|. \end{aligned}$$

Substituindo isto em (4.22) obtemos a seguinte desigualdade

$$v_\tau \leqslant \left(\frac{1}{a}+1\right) b_{\tau-1} + (1-a)\sum_{n=n_0}^{\tau-1} |x_n|. \tag{4.23}$$

Por outro lado, somando em (4.19) de n_0 até $\tau-1$, obtemos

$$v_\tau - v_{n_0} \leqslant -a\sum_{n=n_0}^{\tau-1}|x_n| + \sum_{n=n_0}^{\tau-1} b_n,$$

e então, isolando $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\tau-1}|x_n|$, obtemos

$$\sum_{n=n_0}^{\tau-1}|x_n| \leqslant \frac{1}{a}\left(v_{n_0} - v_\tau + \sum_{n=n_0}^{\tau-1} b_n\right) \leqslant \frac{1}{a}\left(v_{n_0} + \sum_{n=n_0}^{\tau-1} b_n\right) \leqslant \frac{1}{a}(v_{n_0}+b),$$

onde $b := \displaystyle\sum_{j=n_0}^{\infty} b_n$. Agora, denotamos

$$M := \frac{1}{a}(v_{n_0}+b)$$

e voltamos a (4.23) para obter:

$$\begin{aligned} v_\tau &\leqslant \left(\frac{1}{a}+1\right) b_{\tau-1} + (1-a)M \\ &\leqslant \left(\frac{1}{a}+1\right) b + (1-a)M. \end{aligned}$$

o que contradiz o fato da sequência (v_n) ser ilimitada superiormente. Logo o Teorema se verifica. ■

Exemplo 4.2 *Se em (4.1) tomamos $n_0 = 2$ e*

$$H(n, x_2, ..., x_n) = \frac{x_2}{3n^{n-2}} + \frac{x_3}{3n^{n-3}} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{3n} + \frac{x_n}{n^2|x_n|}$$

então a solução do sistema (4.1) é limitada.

Para provar isso vamos exibir duas sequências $(a_{n,j})_{0\leqslant j\leqslant n}$ e (b_n) como no enunciado do Teorema anterior. Definimos tais sequências pondo

$$a_{n,j} = \frac{1}{3}\frac{1}{n^j} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{n^2}.$$

Assim, a série $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$, converge, e temos cumprida uma das hipóteses do teorema anterior. Vejamos agora que no presente caso vale a seguinte hipótese do último Teorema:

$$\sup_{n\geq 2}\sum_{j=0}^{\infty} a_{n+j,j} < 1. \tag{4.24}$$

Para cada $n \geq 2$ fixado, temos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{n+j,j} = a_{n,0} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{n+j,j} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(n+j)^j} \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j} = \frac{2}{3}$$

o que implica na expressão dada em (4.24). Para finalizar, resta mostrar que é cumprida a condição (4.14) do Teorema precedente, isto é:

$$|H(n, x_2, ..., x_n)| \leqslant \sum_{j=1}^{n-2} a_{n,j}|x_{n-j}| + b_n, \qquad \forall n \geq 2.$$

Usando a definição de H, a desigualdade triangular e a definição de $a_{n,j}$, obtemos para cada $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
&|H(n, x_2, ..., x_n)| = \left|\frac{x_2}{3n^{n-2}} + \frac{x_3}{3n^{n-3}} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{3n} + \frac{x_n}{n^2|x_n|}\right| \\
&\leqslant \frac{|x_2|}{3n^{n-2}} + \frac{|x_3|}{3n^{n-3}} + \cdots + \frac{|x_{n-1}|}{3n} + \frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{j=1}^{n-2}\frac{|x_{n-j}|}{3n^j} + \frac{1}{n^2} = \sum_{j=1}^{n-2} a_{n,j}|x_{n-j}| + b_n,
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. $\square$

4.2 Limitação por Comparação

Nesta seção utilizamos o método da comparação para investigar a limitação da solução de EDV's. Nesta parte do trabalho não faremos uso das funções de Lyapunov

V, utilizadas na seção anterior. A grosso modo, este método consiste em transferir o problema de obter informações de caráter qualitativo a respeito da solução de um sistema dado, para um sistema auxiliar apropriado. Por este método, as respostas das questões relativas à solução do sistema original, são dadas pelas respostas às perguntas correspondentes e adequadas relativas ao sistema auxiliar. É claro que um dos fatores que determinam se o sistema auxiliar é adequado, é a facilidade, em relação ao sistema original, de se obter as respostas para as questões mencionadas acima. Utilizaremos tal método para estudar a limitação de sistemas que apresentam a seguinte forma geral:

$$\Delta x_n = F(n, x_{n_0}, ..., x_n), \quad n \geq n_0; \qquad x_{n_0} \text{ dado}, \tag{4.25}$$

onde, $x_n \in \mathbb{R}^r$

O sistema auxiliar com o qual vamos comparar o sistema acima é um sistema escalar da forma:

$$\Delta y_n = g(n, y_{n_0}, \ldots, y_n), \quad \forall n \geq n_0; \qquad y_{n_0} \text{ dado}, \tag{4.26}$$

onde $g\colon N_0 \times S_1 \to \mathbb{R}^+$ satisfaz:

$$g(n, y_{n_0}, \ldots, y_n, \ldots) = g(n, y_{n_0}, \ldots, y_n), \qquad \forall y_n \in \mathbb{R}.$$

O próximo resultado determina sob que condições o sistema (4.26) é apropriado para auxiliar a investigação sobre a limitação do sistema (4.25) e convergência de sua solução.

Teorema 4.4 *Suponhamos que os sistemas (4.25) e (4.26) acima, são tais que as seguintes relações se verificam:*

$$|F(n, x_{n_0}, \ldots, x_n)| \leqslant g(n, |x_{n_0}|, ..., |x_n|), \qquad \forall n \geq n_0, \tag{4.27}$$

e para cada j, $n_0 \leqslant j \leqslant n$, a função:

$$|x_j| \mapsto g(n, |x_{n_0}|, \ldots, |x_j|, \ldots, |x_n|) \quad \text{é não decrescente}. \tag{4.28}$$

Se $|x_{n_0}| \leqslant y_{n_0}$, então

- *A limitação uniforme (respectivamente limitação) do sistema (4.26) implica na limitação uniforme (respectivamente limitação) do sistema (4.25);*

- *Se a solução (y_n) do sistema (4.26) é limitada, então, a solução (x_n) do sistema (4.25) é convergente.*

Prova: Vamos começar provando que

$$|x_n| \leqslant y_n, \qquad \forall n \geq n_0,$$

o que implica no primeiro resultado a ser provado. Faremos isso por indução em $n \geq n_0$. Para $n = n_0$, a desigualdade acima vale por hipótese. Suponhamos agora que, para algum $k \in N_{n_0}$:

$$|x_j| \leqslant y_j \quad \text{para} \quad n_0 \leqslant j \leqslant k.$$

Provemos que

$$|x_{k+1}| \leqslant y_{k+1}. \tag{4.29}$$

Usando a desigualdade triangular em (4.25) deduzimos que

$$|x_{n+1}| - |x_n| \leqslant |F(n, x_{n_0}, \ldots, x_n)|, \qquad \forall n \geq n_0.$$

Somando de n_0 até k na desigualdade anterior, usando a hipótese (4.27), a hipótese de indução e (4.28), obtemos as desigualdades abaixo

$$\begin{aligned} &|x_{k+1}| - |x_{n_0}| \\ &\leqslant \sum_{n=n_0}^{k} |F(n, x_{n_0}, \ldots, x_n)| \leqslant \sum_{n=n_0}^{k} g(n, |x_{n_0}|, \ldots, |x_n|) \leqslant \sum_{n=n_0}^{k} g(n, y_{n_0}, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Concluímos então, que

$$|x_{k+1}| \leqslant |x_{n_0}| + \sum_{n=n_0}^{k} g(n, y_{n_0}, \ldots, y_n) \leqslant y_{n_0} + \sum_{n=n_0}^{k} g(n, y_{n_0}, \ldots, y_n). \tag{4.30}$$

Por outro lado, somando de n_0 até k em (4.26) tem-se

$$\sum_{n=n_0}^{k} (y_{n+1} - y_n) = \sum_{n=n_0}^{k} g(n, y_{n_0}, \ldots, y_n),$$

isto é,

$$y_{k+1} - y_{n_0} = \sum_{n=n_0}^{k} g(n, y_{n_0}, \dots, y_n),$$

portanto, o último membro em (4.30) pode ser escrito como

$$y_{n_0} + \sum_{n=n_0}^{k} g(n, y_{n_0}, \dots, y_n) = y_{k+1}.$$

Substituindo esta expressão em (4.30), obtemos (4.29) e isso encerra a prova do item 1. Provemos o segundo item. Suponhamos que a solução (y_n) do sistema (4.26) é limitada. Para provar que a solução (x_n) do sistema (4.25) é convergente, vamos mostrar que ela é uma sequência de Cauchy. Do fato da função g ser não-negativa e de (4.26) concluímos que a sequência (y_n) é não-decrescente, daí, como essa sequência é limitada segue que ela é convergente e portanto

$$|y_n - y_m| \to 0 \qquad \text{quando} \qquad n, m \to \infty.$$

Sejam $n > m \geq n_0$. Então, usando (4.25)–(4.26) deduzimos que

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= |-x_m + x_{m+1} - x_{m+1} + x_{m+2} - x_{m+2} + \cdots + x_{n-1} - x_{n-1} + x_n| \\
&= |F(m, x_{n_0}, \dots, x_m) + \cdots + F(n-1, x_{n_0}, \dots, x_{n-1})| \\
&\leqslant \sum_{j=m}^{n-1} |F(j, x_{n_0}, \dots, x_j)| \leqslant \sum_{j=m}^{n-1} g(j, |x_{n_0}|, \dots, |x_j|) \leqslant \sum_{j=m}^{n-1} g(j, y_{n_0}, \dots, y_j) \\
&= g(m, y_{n_0}, \dots, y_m) + g(m+1, y_{n_0}, \dots, y_{m+1}) + \cdots + g(n-1, y_{n_0}, \dots, y_{n-1}) \\
&= (y_{m+1} - y_m) + (y_{m+2} - y_{m+1}) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) \\
&= y_n - y_m \\
&\leqslant |y_n - y_m|.
\end{aligned}$$

Daí segue que (x_n) é de Cauchy, como queríamos demonstrar. ■

4.3 Algumas Equações não Dissipativas

A partir de agora vamos nos concentrar no estudo da seguinte EDV escalar não-linear de convolução:

$$\Delta x_n = b_n - \sum_{j=0}^{n} a_j g(x_{n-j}), \quad n \geq 0, \qquad x_0 \quad \text{dado} \tag{4.31}$$

Aqui, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função dada e (a_n) e (b_n) são sequências dadas de números reais .

Daremos a seguir algumas condições sobre os coeficientes e função g, da equação acima que asseguram a limitação de sua solução.

Teorema 4.5 *Suponhamos que*

$$a_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \qquad e \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty;$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0;$$

$$\liminf_{x\to\infty} g(x) > 0 \qquad e \qquad \limsup_{x\to-\infty} g(x) < 0;$$

$$\exists\, r \in \mathbb{R}, \quad r > 0, \quad \textit{tal que}, \quad g(x) \geq -r, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \tag{4.32}$$

$$g \ \textit{leva conjuntos limitados} \ A \subset \mathbb{R} \ \textit{em conjuntos limitados em} \ \mathbb{R}. \tag{4.33}$$

Então a solução de (4.31) é limitada.

Prova: Iniciamos a prova do Teorema obtendo alguns resultados que serão úteis e introduzindo alguma notação.

Denotemos

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad b = \sup_n |b_n|.$$

Da equação (4.31) e da hipótese (4.32) vem que, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$\begin{aligned} \Delta x_n &\leqslant b_n + r\sum_{j=0}^{n} a_j \\ &\leqslant b + ra. \end{aligned}$$

Denotamos $c = b+ra$, para reescrever a desigualdade anterior da forma mais simples:

$$\Delta x_n \leqslant c, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \tag{4.34}$$

Para provar que a solução da EDV (4.31) é limitada vamos mostrar que

$$\sup_n x_n < \infty \qquad \text{e} \qquad \inf_n x_n > -\infty.$$

Mostremos a primeira das duas desigualdades acima, por redução ao absurdo. A suposição de que $\sup x_n = \infty$ nos permite construir a subsequência (x_{k_n}), da seguinte forma: k_0 será o primeiro índice tal que x_{k_0} é maior do que $\max\{x_0, 0\}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, k_n será o primeiro índice tal que x_{k_n} é maior do que $\max\{x_{k_{n-1}}, n\}$. Claramente $x_{k_n} \geq x_j$ para todo $0 \leqslant j \leqslant k_n$ e $x_{k_n} \to \infty$ quando $n \to \infty$. Consideremos agora a subsequência (x_{t_n}) onde para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, $t_n = k_n - 1$. Então, $x_{t_n} \leqslant x_{k_n} = x_{t_n+1}$. Além disso de (4.34) temos que $x_{t_n+1} - x_{t_n} \leqslant c$, isto é, $x_{t_n} \geq x_{k_n} - c$ e portanto encontramos uma subsequência $x_{t_n} \to \infty$ quando $n \to \infty$ satisfazendo

$$x_{t_n+1} - x_{t_n} \geq 0 \qquad \forall n \geq 0. \tag{4.35}$$

Construímos agora a sequência (T_n) pondo

$$T_n = \min\left(t_n, \frac{1}{2c}x_{t_n}\right).$$

Claramente

$$\lim T_n = \infty. \tag{4.36}$$

Agora, fixamos $n \in \mathbb{Z}^+$ grande e tomamos $m \in \mathbb{Z}^+$, tal que

$$t_n - T_n \leqslant m \leqslant t_n. \tag{4.37}$$

Vamos mostrar que

$$x_m \geq \frac{1}{2} x_{t_n}, \tag{4.38}$$

Consideremos inicialmente $m < t_n$. Somando de m até $t_n - 1$ em (4.34), obtemos

$$\sum_{l=m}^{t_n-1} (x_{l+1} - x_l) \leqslant (t_n - m)c.$$

Notando que o lado esquerdo da expressão acima é uma soma telescópica, usando a primeira desigualdade apresentada em (4.37) e a definição de (T_n), obtemos

$$x_{t_n} - x_m \leqslant cT_n \leqslant \frac{1}{2} x_{t_n}.$$

Agora, isolamos x_m para obter a desigualdade dada em (4.38). O fato desta desigualdade também ser válida para $m = t_n$, é uma consequência de $x_{t_n} \to \infty$. Desta forma, fazendo $n \to \infty$, podemos construir uma sequência (x_m), com m satisfazendo (4.37) a qual satisfaz, por (4.38):

$$x_m \to \infty.$$

Seja c_1, $0 < c_1 < \liminf_{x\to\infty} g(x)$. Pela Proposição 2.4, existe $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, tal que

$$g(x_m) \geq c_1, \quad t_n - T_n \leqslant m \leqslant t_n, \quad n \geq n_0. \tag{4.39}$$

Por outro lado, da equação (4.31), vem que, para cada $n \geq n_0$:

$$\Delta x_{t_n} = b_{t_n} - \sum_{j=0}^{T_n} a_j g(x_{t_n - j}), \quad \text{caso} \quad T_n = t_n,$$

e

$$\Delta x_{t_n} = b_{t_n} - \sum_{j=0}^{T_n} a_j g(x_{t_n - j}) - \sum_{j=T_n+1}^{t_n} a_j g(x_{t_n - j}), \quad \text{caso} \quad T_n < t_n.$$

Do primeiro caso, usando (4.39) e o limite obtido em (4.36), deduzimos que

$$\begin{aligned} \Delta x_{t_n} &= b_{t_n} - a_0 g(x_{t_n}) - a_1 g(x_{t_n-1}) - \cdots - a_{T_n} g(x_{t_n - T_n}) \\ &\leqslant b_{t_n} - c_1 \sum_{j=0}^{T_n} a_j \to -c_1 a \; < 0 \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Então $\Delta x_{t_n} < 0$, para n grande, o que contradiz (4.35). Do segundo caso, usando o que desenvolvemos no primeiro caso e a hipótese (4.32), obtemos que

$$\Delta x_{t_n} \leqslant b_{t_n} - c_1 \sum_{j=0}^{T_n} a_j + r \sum_{j=T_n+1}^{t_n} a_j \to -c_1 a \ < 0, \tag{4.40}$$

quando $n \to \infty$ $\left(\text{pois, } \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=T_n+1}^{t_n} a_j = 0\right)$, o que novamente contradiz (4.35). Portanto

$$\sup_n x_n < \infty. \tag{4.41}$$

Neste momento convém observar que na prova acima, a hipótese (4.32) foi usada somente para obter as expressões (4.34) e (4.40) e, além disso, bastaria somente que $\inf\limits_n g(x_n) < -\infty$. Voltaremos a este ponto mais adiante.

Para provar o Teorema, resta mostrar que

$$\inf_n x_n > -\infty.$$

Para tanto, vamos construir um sistema similar ao dado em (4.31) e aproveitar o que fizemos para deduzir (4.41). Defina a sequência (u_n) e a função $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pondo

$$u_n = -x_n \qquad h(y) = -g(-y).$$

Usando isto e a equação dada em (4.31) obtemos

$$\begin{aligned} \Delta u_n &= u_{n+1} - u_n = -(x_{n+1} - x_n) = -b_n + \sum_{j=0}^{n} a_j g(x_{n-j}) \\ &= -b_n - \sum_{j=0}^{n} a_j h(y_{n-j}). \end{aligned}$$

Assim, obtemos o sistema

$$\Delta u_n = -b_n - \sum_{j=0}^{n} a_j h(y_{n-j}), \qquad u_0 = -x_0, \tag{4.42}$$

que se assemelha ao sistema (4.31). Vejamos que h possui as mesmas propriedades de g:

$$\liminf_{y\to\infty} h(y) = \liminf_{y\to\infty} -g(-y) = -\limsup_{y\to\infty} g(-y) = -\limsup_{y\to-\infty} g(y) > 0;$$

$$\limsup_{y\to-\infty} h(y) = \limsup_{y\to-\infty} -g(-y) = -\liminf_{y\to-\infty} g(-y) = -\liminf_{y\to\infty} g(y) < 0.$$

Claramente da definição h segue que tal função leva conjuntos limitados de $\mathbb{R}$ em conjuntos limitados de $\mathbb{R}$. Agora, em vez de mostrar o correspondente à hipótese (4.32) para o sistema (4.42), ou seja, que existe $r > 0$ tal que $h(y) \geq -r$, para todo $y \in \mathbb{R}$, vamos mostrar o que de fato é essencial, isto é, segundo a observação feita acima, que $\inf_n h(u_n) > -\infty$, onde (u_n) é solução do sistema (4.42). De fato, de (4.41), (4.33) e $\limsup_{x\to-\infty} g(x) < 0$, segue que $\sup_n g(x_n) < \infty$. Então,

$$\inf_n h(u_n) = -\sup_n g(x_n) > -\infty.$$

Assim , usando a primeira parte da demonstração, concluímos que

$$\infty > \sup_n u_n = \sup_n -x_n = -\inf_n x_n,$$

e então obtemos

$$\inf_n x_n > -\infty,$$

que era o que faltava para encerrar a prova do teorema. ■

4.4 Estimativa para Algumas Equações Implícitas

Nesta seção pretendemos obter estimativas para EDV's dadas implicitamente, não-lineares não-homogêneas. Para isso recorremos à construção de sequêcias auxiliares apropriadas. Vamos começar obtendo uma estimativa para a solução de algumas equações que apresentam a seguinte forma:

$$x_n = b_n + \sum_{j=1}^{n} F(n, j, x_j), \qquad n \geq 1, \tag{4.43}$$

onde $x_n \in \mathbb{R}$, e b_n é uma sequência dada de números reais.

O seguinte lema será muito útil para a obtenção da estimativa mencionada acima.

Lema 4.1 *Seja* $F: \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua a respeito de* x *e tal que para cada* $n, j \in \mathbb{Z}^+$, *a função* $x \mapsto xF(n,j,x)$ *é não positiva e* $xF(n+1,j,x) \geq xF(n,j,x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *e todo* n, $n \geq j$. *Nestas condições, temos que, para todo* $x \in \mathbb{R}$ *e cada* $n, j \in \mathbb{Z}^+$ *com* $n \geq j$:

- $F^+(n+1,j,x) - F^+(n,j,x) \leqslant 0$;
- $F^-(n+1,j,x) - F^-(n,j,x) \geq 0$,

onde $F^+ = max\{0, F\}$, $F^- = min\{0, F\}$.

Prova: Fixemos $j \in \mathbb{Z}^+$. A desigualdade $xF(n,j,x) \leqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, implica que

$$x \leqslant 0 \Rightarrow F(n,j,x) \geq 0, \qquad \forall n \geq 0 \tag{4.44}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow F(n,j,x) \leqslant 0. \tag{4.45}$$

Por outro lado, da hipótese de que $xF(n+1,j,x) \geq xF(n,j,x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo n, $n \geq j$, segue que

$$x\left[F(n+1,j,x) - F(n,j,x)\right] \geq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad n \geq j.$$

Daqui obtemos a seguinte implicação:

$$x \leqslant 0 \Rightarrow F(n+1,j,x) - F(n,j,x) \leqslant 0, \qquad n \geq j, \tag{4.46}$$

Estudemos a função $F^+(n+1,j,x) - F^+(n,j,x)$, para $n \geq j$. Tomemos $x \leqslant 0$. Então, usando (4.44) e (4.46) obtemos,

$$\begin{aligned} F^+(n+1,j,x) - F^+(n,j,x) &= max\{0, F(n+1,j,x)\} - max\{0, F(n,j,x)\} \\ &= F(n+1,j,x) - F(n,j,x) \\ &\leqslant 0. \end{aligned}$$

Agora consideremos $x > 0$. Usando (4.45) concluímos que

$$F^+(n+1,j,x) - F^+(n,j,x) = \underbrace{max\{0, F(n+1,j,x)\}}_{=0} - \underbrace{max\{0, F(n,j,x)\}}_{=0} = 0.$$

Fica assim provado que

$$F^+(n+1,j,x) - F^+(n,j,x) \leqslant 0, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e todo} \quad n \geq j.$$

De forma análoga mostra-se que

$$F^-(n+1,j,x) - F^-(n,j,x) \geq 0, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e todo} \quad n \geq j.$$

■

V. B. Kolmanosskii e J. P. Richard [11] obtiveram uma estimativa para a solução da equação (4.43) que depende somente dos coeficientes b_n.

Teorema 4.6 *Se são cumpridas as condições dadas no Lema 4.1, então valem as seguintes desigualdades:*

$$b_n - |b_1| - \sum_{j=1}^{n-1} |b_{j+1} - b_j| \leqslant 2x_n \leqslant b_n + |b_1| + \sum_{j=1}^{n-1} |b_{j+1} - b_j|, \qquad n \geq 1, \qquad (4.47)$$

onde x_n é solução da equação (4.43).

Convenção: Para $n = 1$ o somatório acima será considerado nulo.

Prova: Sejam as sequências (u_n) e (z_n) definidas respectivamente por

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} F^+(n,j,x_j) + \frac{1}{2}\left(b_n - |b_1| - \sum_{j=1}^{n-1} |b_{j+1} - b_j|\right) - \epsilon n, \quad \epsilon > 0$$

$$z_n = -\sum_{j=1}^{n} F^-(n,j,x_j) - \frac{1}{2}\left(b_n + |b_1| + \sum_{j=1}^{n-1} |b_{j+1} - b_j|\right) - \epsilon n, \quad \epsilon > 0.$$

Usando estas definições obtemos

$$\begin{aligned}
u_n - z_n &= \sum_{j=1}^{n} F^+(n,j,x_j) + \frac{1}{2}\left(b_n - |b_1| - \sum_{j=1}^{n-1}|b_{j+1}-b_j|\right) \\
&\quad -\epsilon n + \sum_{j=1}^{n} F^-(n,j,x_j) + \frac{1}{2}\left(b_n + |b_1| + \sum_{j=1}^{n-1}|b_{j+1}-b_j|\right) + \epsilon n \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[F^+(n,j,x_j) + F^-(n,j,x_j)\right] + b_n
\end{aligned}$$

Notando que $F^+ + F^- = F$ e usando (4.43), obtemos da igualdade acima, a seguinte expressão

$$u_n - z_n = x_n \tag{4.48}$$

A seguir veremos como se relacionam os termos sucessivos das sequências (u_n) e (z_n).

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{j=1}^{n+1} F^+(n+1,j,x_j) + \frac{1}{2}\left(b_{n+1} - b_n - \sum_{j=1}^{n}|b_{j+1}-b_j| + \sum_{j=1}^{n-1}|b_{j+1}-b_j|\right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n} F^+(n,j,x_j) - \epsilon \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} F^+(n+1,j,x_j) - \sum_{j=1}^{n} F^+(n,j,x_j) + \underbrace{\frac{1}{2}\left(b_{n+1} - b_n - |b_{n+1}-b_n|\right)}_{:= p_n} - \epsilon \\
&= F^+(n+1,n+1,x_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n}[F^+(n+1,j,x_j) - F^+(n,j,x_j)] + p_n - \epsilon
\end{aligned}$$

O Lema 4.1 implica que o somatório acima é não-positivo. Além disso, é fácil ver que $p_n \leqslant 0$. Portanto, da igualdade anterior obtemos

$$u_{n+1} - u_n \leqslant F^+(n+1,n+1,x_{n+1}) - \epsilon,$$

ou, usando a expressão obtida em (4.48):

$$u_{n+1} - u_n \leqslant F^+(n+1,n+1,u_{n+1} - z_{n+1}) - \epsilon. \tag{4.49}$$

Um procedimento análogo nos leva a :

$$z_{n+1} - z_n \leqslant -F^-(n+1,n+1,u_{n+1} - z_{n+1}) - \epsilon. \tag{4.50}$$

Vejamos agora que $u_1 < 1$. Da definição de u_n temos que

$$u_1 = F^+(1, 1, x_1) + \frac{1}{2}(b_1 - |b_1|) - \epsilon.$$

Suponhamos inicialmente que $b_1 \geq 0$. Neste caso

$$u_1 = F^+(1, 1, x_1) - \epsilon. \tag{4.51}$$

Para mostrar que $u_1 < 0$ vamos começar mostrando que $x_1 \geq 0$. Usando (4.43) obtemos

$$x_1 = b_1 + F(1, 1, x_1) < 0 \Rightarrow F(1, 1, x_1) < 0 \qquad \therefore \qquad x_1 < 0 \Rightarrow x_1 F(1, 1, x_1) > 0,$$

uma contradição, e portanto $x_1 \geq 0$. Como $x_1 F(1, 1, 1x_1) \leqslant 0$, segue que $F(1, 1, x_1) \leqslant 0$, e então, $F^+(1, 1, x_1) = 0$. Substituindo em (4.51) obtemos

$$u_1 = -\epsilon < 0.$$

Suponhamos agora que $b_1 < 0$. Neste caso

$$u_1 = b_1 + F^+(1, 1, x_1) - \epsilon. \tag{4.52}$$

Vejamos que $x_1 \leqslant 0$:

$$b_1 + F(1, 1, x_1) = x_1 > 0 \Rightarrow F(1, 1, x_1) > 0 \qquad \therefore \qquad x_1 > 0 \Rightarrow x_1 F(1, 1, x_1) > 0,$$

uma contradição, logo $x_1 \leqslant 0$. Assim, de $x_1 F(1, 1, 1, x_1) \leqslant 0$, segue que $F(1, 1, x_1) = F^+(1, 1, x_1)$. Substituindo em (4.52) obtemos

$$u_1 = x_1 - \epsilon < 0.$$

De modo análogo mostra-se que $z_1 < 0$. Assim, quanto às sequências (u_n) e (z_n), há três possibilidades que se excluem mutuamente:

1. Existe $n_0 > 1$ tal que $u_n < 0, \quad 1 \leqslant n \leqslant n_0, \quad u_{n_0+1} \geq 0, \quad z_n \leqslant 0, \quad 1 \leqslant n \leqslant n_0 \quad \text{e} \quad z_{n_0+1} \leqslant u_{n_0+1}$;

2. Existe $n_0 > 1$ tal que $z_n < 0, \quad 1 \leqslant n \leqslant n_0, \quad z_{n_0+1} \geq 0, \quad u_n \leqslant 0, \quad 1 \leqslant n \leqslant n_0$ e $u_{n_0+1} \leqslant z_{n_0+1}$;

3. $u_n, z_n < 0, \quad \forall n \geq 1$.

Vejamos que os dois primeiros casos não podem ocorrer. O primeiro caso implica que

$$u_{n_0+1} - z_{n_0+1} \geq 0 \qquad \text{e} \qquad u_{n_0+1} - u_{n_0} \geq 0.$$

Daí, usando (4.49) e (4.45) obtemos a seguinte contradição:

$$0 \leqslant u_{n_0+1} - u_{n_0} \leqslant F^+(n_0+1, n_0+1, u_{n_0+1} - z_{n_0+1}) - \epsilon = -\epsilon < 0.$$

Por outro lado, do segundo caso obtemos que

$$u_{n_0+1} - z_{n_0+1} \leqslant 0 \qquad \text{e} \qquad z_{n_0+1} - z_{n_0} \geq 0.$$

Daí, usando (4.50) e (4.44) obtemos a seguinte contradição:

$$0 \leqslant z_{n_0+1} - z_{n_0} \leqslant -F^-(n_0+1, n_0+1, u_{n_0+1} - z_{n_0+1}) - \epsilon = -\epsilon < 0.$$

Portanto, vale o terceiro caso, isto é,

$$u_n, z_n < 0, \qquad \forall n \geq 1.$$

Daqui e de (4.48) deduzimos que, para cada $n \geq 1$:

$$u_n < x_n < -z_n. \tag{4.53}$$

Como $F^+ \geq 0$ e $F^- \leqslant 0$, então, das definições de (u_n) e (z_n), concluímos que as seguintes desigualdades são válidas, para cada $n \geq 1$:

$$u_n \geq \frac{1}{2}\left(b_n - |b_1| - \sum_{j=1}^{n-1} |b_{j+1} - b_j|\right) - \epsilon n;$$

$$-z_n \leqslant \frac{1}{2}\left(b_n + |b_1| + \sum_{j=1}^{n-1} |b_{j+1} - b_j|\right) + \epsilon n.$$

Portanto, voltando a (4.53) obtemos que, para cada $n \geq 1$:

$$\frac{1}{2}\left(b_n - |b_1| - \sum_{j=1}^{n-1}|b_{j+1} - b_j|\right) - \epsilon n < x_n < \frac{1}{2}\left(b_n + |b_1| + \sum_{j=1}^{n-1}|b_{j+1} - b_j|\right) + \epsilon n,$$

então, multiplicando por $\dfrac{2}{n}$ conseguimos

$$\frac{1}{n}\left(b_n - |b_1| - \sum_{j=1}^{n-1}|b_{j+1} - b_j|\right) - 2\epsilon < \frac{2x_n}{n} < \frac{1}{n}\left(b_n + |b_1| + \sum_{j=1}^{n-1}|b_{j+1} - b_j|\right) + 2\epsilon.$$

Daqui, como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$\frac{1}{n}\left(b_n - |b_1| - \sum_{j=1}^{n-1}|b_{j+1} - b_j|\right) \leqslant \frac{2x_n}{n} \leqslant \frac{1}{n}\left(b_n + |b_1| + \sum_{j=1}^{n-1}|b_{j+1} - b_j|\right), \quad \forall n \geq 1.$$

Então, multiplicando todos os membros dessas desigualdades por n, obtemos (4.47) finalizando a prova do Teorema. ∎

Veremos a seguir uma outra estimativa para um caso particular de equações da forma (4.43) e que cumpre as hipóteses do teorema anterior. Tais equações são da seguinte forma:

$$x_n = b_n - \sum_{j=0}^{n} a_j g(x_{n-j}) \tag{4.54}$$

onde (a_n) e (b_n) são sequências dadas de números reais e g é uma função a valores reais. Assim como no resultado anterior tal estimativa depende somente dos coeficientes b_n.

Teorema 4.7 *Suponha que a solução da EDV (4.54) alterna de sinal infinitamente, que a sequência (a_n) é não-negativa e não-crescente e g é uma função contínua, tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, $xg(x) \geq 0$, então*

$$|x_n| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty}|\Delta b_j| + \sup_j |b_j| + |b_0|, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+. \tag{4.55}$$

Prova: Vamos dividir a prova em casos, os quais dirão respeito ao sinal da condição inicial do sistema (4.54). Começamos supondo que $x_0 \geq 0$. Sejam as sequências (α_n)

e (β_n), dadas por

$$\alpha_n = \sum_{j=0}^{n} a_j \max\{g(x_{n-j}), 0\} \qquad \text{e} \qquad \beta_n = -\sum_{j=0}^{n} a_j \min\{g(x_{n-j}), 0\}.$$

Como $\max\{a, 0\} + \min\{a, 0\} = a$, para todo $a \in \mathbb{R}$, então, a equação (4.54) pode ser reescrita da seguinte forma

$$x_n = b_n - \alpha_n + \beta_n. \tag{4.56}$$

Note que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$\alpha_n \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \beta_n \geq 0.$$

Da primeira desigualdade acima e de (4.56), segue que

$$x_n \leqslant b_n + \beta_n. \tag{4.57}$$

Da definição de β_n temos que $\beta_0 = -a_0 \min\{g(x_0), 0\}$. Porém, como $x_0 \geq 0$ e, por hipótese, $x_0 g(x_0) \geq 0$, então, $g(x_0) \geq 0$, e portanto, $\beta_0 = 0$. Disso e de (4.57), obtemos a expressão (4.55) para $n = 0$

$$|x_0| = x_0 \leqslant b_0 \leqslant |b_0| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |\Delta b_j| + \sup_j |b_j| + |b_0| \,.$$

Agora, para provar o Teorema 4.7 (no caso $x_0 \geq 0$), resta mostrar que a desigulddade (4.55) vale para cada $n \in \mathbb{N}$. Fixemos então $r \in \mathbb{N}$. Aqui, denotamos um número natural arbitrário por r e não por n, como é habitual, para clareza da notação, uma vez que a letra n já aparece muitas vezes nessa demonstração. Nosso objetivo é obter a expressão dada em (4.55), com este r fixado no lugar de n. Vamos separar esta parte da prova em duas partes: supondo $x_r > 0$ e supondo $x_r < 0$. É claro que aquela expressão é verdadeira quando $x_r = 0$. Vamos começar supondo que $x_r > 0$.

Considere as sequências de índices (s_n) e (q_n) definidas pelas seguintes relações:

$$n \leqslant s_0 \Rightarrow x_n \geq 0 \qquad \text{e} \qquad x_{s_0+1} < 0;$$

$$s_0 + 1 \leqslant n \leqslant q_0 \Rightarrow x_n \leqslant 0 \qquad \text{e} \qquad x_{q_0+1} > 0.$$

De modo análogo para s_m e q_m, $m \geq 1$:

$$q_{m-1}+1 \leqslant n \leqslant s_m \Rightarrow x_n \geq 0 \qquad \text{e} \qquad x_{s_m+1}<0,$$

$$s_m+1 \leqslant n \leqslant q_m \Rightarrow x_n \leqslant 0 \qquad \text{e} \qquad x_{q_m+1}>0. \tag{4.58}$$

Note que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, $s_n < q_n$ e, além disso:

$$x_{s_n} \geq 0 \qquad \text{e} \qquad x_{s_n+1}<0; \tag{4.59}$$

$$x_{q_n} \leqslant 0 \qquad \text{e} \qquad x_{q_n+1}>0. \tag{4.60}$$

Seja A o conjunto de índices que estão entre 0 e $r-1$ e que pertencem a pelo menos um intervalo $[s_n, q_n-1]$, isto é,

$$A=[0,r-1]\bigcap\left[\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+}(s_n,q_n-1)\right]=[0,r-1]\bigcap\left[(s_0,q_0-1)\cup\ldots\cup(s_m,q_m-1)\right],$$

onde $q_m=\max\{q_n; q_n\leqslant r\}$. Seja $k \in \mathbb{Z}^+$, tal que

$$k\in[0,r-1] \qquad \text{e} \qquad k\notin A.$$

Então,

$$k\in[q_0,s_1-1]\cup[q_1,s_2-1]\cup[q_2,s_3-1]\cup\ldots,$$

e portanto

$$k+1\in[q_0+1,s_1]\cup[q_1+1,s_2]\cup[q_2+1,s_3]\cup\ldots,$$

e consequentemente, das definições de s_n e q_n, temos que $x_{k+1}\geq 0$. Usando a definição de (β_n), obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta\beta_k &= \beta_{k+1}-\beta_k=-\sum_{j=0}^{k+1}a_j\min\{g(x_{k+1-j}),0\}+\sum_{j=0}^{k}a_j\min\{g(x_{k-j}),0\}\\
&= -\sum_{j=0}^{k+1}a_{k+1-j}\min\{g(x_j),0\}+\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}\min\{g(x_j),0\}\\
&= -a_0\min\{g(x_{k+1}),0\}+\sum_{j=0}^{k}(a_{k-j}-a_{k+1-j})\min\{g(x_j),0\}.
\end{aligned}$$

A desigualdade $x_{k+1} \geq 0$ obtida acima e a hipótese de que $x_{k+1}g(x_{k+1}) \geq 0$, implicam que $\min\{g(x_{k+1}), 0\} = 0$. Portanto, da expressão dada acima para $\Delta\beta_k$, obtemos

$$\Delta\beta_k \;=\; \sum_{j=0}^{k}(a_{k-j} - a_{k+1-j}) \min\{g(x_j), 0\} \leqslant 0,$$

sendo a desigualdade acima consequência da hipótese de que (a_n) é não-crescente. Como tomamos $k \in [0, r-1] \cap A^{\complement}$ arbitrário, concluímos que

$$\Delta\beta_k \leqslant 0, \qquad \forall k \in [0, r-1] \cap A^{\complement}.$$

Por outro lado, sabendo que $\beta_0 = 0$, obtemos

$$\sum_{j=0}^{r-1} \Delta\beta_j = \sum_{j=0}^{r-1}(\beta_{j+1} - \beta_j) = \beta_r - \beta_0 = \beta_r.$$

Das duas últimas expressões vem que

$$\beta_r \leqslant \sum_{j \in A} \Delta\beta_j.$$

Daqui e da igualdade (4.56) deduzimos que

$$\beta_r \leqslant \sum_{j \in A} \Delta x_j + \sum_{j \in A} \Delta\alpha_j - \sum_{j \in A} \Delta b_j. \tag{4.61}$$

Estudemos separadamente as duas primeiras somas acima:

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in A} \Delta x_j &= \sum_{j=s_0}^{q_0-1}(x_{j+1} - x_j) + \sum_{j=s_1}^{q_1-1}(x_{j+1} - x_j) + \cdots + \sum_{j=s_m}^{q_m-1}(x_{j+1} - x_j) \\
&= (x_{q_0} - x_{s_0}) + (x_{q_1} - x_{s_1}) + \cdots + (x_{q_m} - x_{s_m})
\end{aligned}$$

Cada uma das expressões entre parênteses é não positiva, já que, como concluímos em (4.59) e (4.60): $x_{q_n} \leqslant 0$ e $x_{s_n} \geq 0$, logo

$$\sum_{j \in A} \Delta x_j \leqslant 0. \tag{4.62}$$

Agora vamos analisar o segundo somatório dado em (4.61).

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in A} \Delta\alpha_j &= \sum_{j=s_0}^{q_0-1}(\alpha_{j+1} - \alpha_j) + \sum_{j=s_1}^{q_1-1}(\alpha_{j+1} - \alpha_j) + \cdots + \sum_{j=s_m}^{q_m-1}(\alpha_{j+1} - \alpha_j) \\
&= (\alpha_{q_0} - \alpha_{s_0}) + (\alpha_{q_1} - \alpha_{s_1}) + \cdots + (\alpha_{q_m} - \alpha_{s_m}). \qquad (4.63)
\end{aligned}$$

Usando a definição de α_n, e o fato de que $s_n < q_n$, concluímos que para cada $i \in \mathbb{Z}^+$:

$$\begin{aligned}
\alpha_{q_i} - \alpha_{s_i} &= \sum_{k=0}^{q_i} a_k \max\{g(x_{q_i-k}), 0\} - \sum_{k=0}^{s_i} a_k \max\{g(x_{s_i-k}), 0\} \\
&= \sum_{k=0}^{q_i} a_{q_i-k} \max\{g(x_k), 0\} - \sum_{k=0}^{s_i} a_{s_i-k} \max\{g(x_k), 0\} \\
&= \sum_{k=0}^{s_i} a_{q_i-k} \max\{g(x_k), 0\} + \sum_{k=s_i+1}^{q_i} a_{q_i-k} \max\{g(x_k), 0\} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{s_i} a_{s_i-k} \max\{g(x_k), 0\}.
\end{aligned}$$

Agora, de (4.58) e da hipótese de que $xg(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, deduzimos que o segundo somatório na última igualdade é igual a 0, portanto podemos escrever

$$\alpha_{q_i} - \alpha_{s_i} = \sum_{j=0}^{s_i} [(a_{q_i-j} - a_{s_i-j}) \max\{g(x_j), 0\}] \leqslant 0, \qquad \forall i \in \mathbb{Z}^+,$$

sendo que a desigualdade acima foi obtida do fato de que $s_n < q_n$, e da monotonicidade da sequência (a_n). Logo, voltando a (4.63), obtemos

$$\sum_{j \in A} \Delta\alpha_j \leqslant 0. \tag{4.64}$$

Voltando a (4.61) e usando os resultados (4.62) e (4.64) conseguimos

$$\beta_r \leqslant -\sum_{j \in A} \Delta b_j \leqslant \sum_{j \in A} |\Delta b_j| \, .$$

Daqui e (4.57) chegamos a

$$x_r \leqslant b_r + \beta_r \leqslant b_r + \sum_{j \in A} |\Delta b_j| \, .$$

Portanto, obtemos o resultado desejado

$$x_r \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |\Delta b_j| + \sup_j |b_j| + |b_0|.$$

Fica assim provada a expressão (4.55), para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, tal que $x_n > 0$.

A seguir, vamos mostrar que aquela expressão também é verdadeira para $n \in \mathbb{N}$, tal que $x_n < 0$. Para isto, o procedimento será o mesmo adotado anteriormente, isto é, vamos obter a expressão dada em (4.55), com aquele r fixado no lugar de n, supondo $x_r < 0$.

Defina a sequência (y_n) e a função h definida em $\mathbb{R}$, pondo

$$y_n = -x_n \qquad \text{e} \qquad h(x) = -g(-x).$$

Com isso, obtemos a seguinte equação, que é similar a (4.54):

$$y_n = -b_n - \sum_{j=0}^{n} a_j h(y_{n-j}).$$

Além disso, da definição de h e da hipótese de que $xg(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, conseguimos

$$xh(x) = x(-g(-x)) = -xg(-x) \geq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como $y_r = -x_r > 0$, então, pelo que demostramos anteriormente concluímos que

$$y_r \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |\Delta b_j| + \sup_j |b_j| + |b_0|,$$

isto é

$$|x_r| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |\Delta b_j| + \sup_j |b_j| + |b_0|.$$

Isso encerra a prova da expressão (4.55), quando $x_0 > 0$. Para $x_0 < 0$ o procedimento é o mesmo adotado acima e os cálculos são análogos.

■

Capítulo 5

Perspectivas de Trabalho

Desejamos nesta parte final do trabalho mencionar algumas linhas de investigação motivadas pelos capítulos anteriores.

Ao longo deste trabalho utilizamos frequentemente funções de Lyapunov para investigar o comportamento no infinito das soluções de EDV´s. Entretanto, não nos detivemos na construção dessas funções. Vimos que em todos os casos as funções de Lyapunov dependem dos coeficientes da equação a ser estudada (e da função que determina a não-linearidade da equação, se for o caso). Portanto, é de se esperar que, em geral, diferentes funções de Lyapunov nos forneçam diferentes condições sobre os coeficientes da equação que asseguram a propriedade em estudo. Assim, surge a questão de saber qual função de Lyapunov impõe condições menos restritivas sobre a equação.

Em todo o nosso trabalho o espaço das soluções das equações estudadas é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Um dos possíveis desenvolvimentos do presente trabalho é o estudo de propriedades qualitativas das soluções de equações a diferenças de Volterra em espaços mais gerais. Este tema já é objeto de pesquisa e tem rendidido algumas publicações. Por exemplo, em 2005 C. González *et al.* realizaram um estudo sobre existência e propriedades qualitativas das soluções de equações a diferenças de Volterra em espaços de Hilbert. Aqui, mais uma vez se destaca a importância da obtenção de procedimentos efetivos para a contrução das funções de Lyapunov. Pois, se desejarmos estender os métodos envolvendo estas funções abordados neste trabalho, é preciso saber como estas funções são obtidas e verificar se é possível contruí-las em espaços mais gerais.

Em nosso trabalho, nos concentramos em equações associadas a um número finito de condições iniciais. Porém, um campo de pesquisa que tem atraído bastante a atenção dos pesquisadores nos últimos anos e que tem rendido diversas publicações é a teoria assintótica para equações a diferenças funcionais com retardo infinito. Citamos [2] e [3], como exemplo de estudos desenvolvidos nesta direção.

Referências Bibliográficas

[1] T. A. Burton, Volterra Integral and Differencial Equations, *Academic Press, New York (1983).*

[2] C. Cuevas, M. Pinto, Asymptotic properties of solutions to nonautonomous Volterra difference systems with infinite delay, *Computers and Mathematics with Applications, 42 (2001), 671–685.*

[3] C. Cuevas, C. Vidal, A note on discrete maximal regularity for functional difference equations with infinite delay, *Advances in Difference Equations, ID 97614, (2006) 1–11.*

[4] M. R. Crisci, V. B .Kolmanovskii, E. Russo, A. Vecchio, On exponential stability of discrete Volterra systems, *Journal of Difference Equations and Applications, 6 (2000) 667–680 .*

[5] M. R. Crisci, V. B. Kolmanovskii, E. Russo, A. Vecchio, Boundedness of discrete Volterra equations, *Journal Math. Anal. Appl. 211 (1997) 106–130.*

[6] M. R. Crisci, V. B. Kolmanovskii, E. Russo, A. Vecchio, Stabiliy of difference Volterra equations: direct Lyapunov method and numerical procedure, *Computers Math. Appl. Vol 36 No. 10–12 77–97 (1998).*

[7] E. V. Ivinskaya, V. B. Kolmanovskii, On limitedness of the solutions of some difference Volterra equations, *Automation Remot Control 61 (8) (2000) 1317–1327.*

[8] V. B. Kolmanovskii, E. Castellanos-Velasco, J. A. Torres-Muñoz, A survey: stability and boundedness of Volterra difference equations, *Nonlinear Analysis, 53 (2003) 861–928.*

[9] V. B. Kolmanovskii, N. P. Kosareva, Stability of Volterra difference equations, *Differential Equations, Vol. 37, No 12 (2001) 1773–1782.*

[10] V. B. Kolmanovskii, A. D. Myshkis, Estimate of solutions for some Volterra difference equations, *Nonlinear Analysis, 40 (2000) 345–363.*

[11] V. B. Kolmanovskii, J. P. Richard, Estimation of the solutions of Volterra difference equations, *Journal Math. Anal. Appll. 273 (2002) 618–626.*

[12] V. B. Kolmanovskii, Boundedness of certain Volterra systems with dissipative nonlinearity, *Automation Remot Control, 60 (3) (1999) 143–155.*

[13] V. B. Kolmanovskii, On the application of the Lyapunov second method to the Volterra difference equations, *Automation Remot Control, 56 (11) (1995) 50–64.*

[14] V. B. Kolmanovskii, On asymptotic properties of solutions of some Volterra nonlinear systems, *Automation Remot Control 61 (4) (2000) 577–584.*

[15] V. B. Kolmanovskii, stability of discrete Volterra equations, *Doklady Math. 349 (5) (1996) 610–614.*

[16] V. B. Kolmanovskii, The stability of certain discrete-time Volterra equations, *Journal Appl. Math. Mech. 63 (4) (1999) 537–543.*

[17] E. L. Lima, Curso de Análise, volume 1, *Projeto Euclides, IMPA-CNPq (1976).*

[18] P. Linz, Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations, *SIAM-Studies in Apllied Mathematic, 1985.*

[19] D. S. Watkins, Fundamentals of Matrix Computations, *Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts (2002).*